Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 5 (3) 1986, S. 265–276

Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktion für große Parameter unterschiedlicher Größenordnung

E. Wagner

Für die hypergeometrische Funktion $F(a, b; c; z)$ werden asymptotische Darstellungen für $|a| \to \infty$ hergeleitet, falls b und $c - b$ unabhängig voneinander entweder konstant sind oder gegen Unendlich streben, wobei $\operatorname{Re} b = O_L(1)$, $\operatorname{Re}(c - b) = O_L(1)$ und $b = o(a^{1/2-\delta})$, $c = o(a^{1/2-\delta})$, $\delta > 0$, vorausgesetzt wird.

Выводятся асимптотические представления гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$ при $|a| \to \infty$, когда b и $c - b$ независимо друг от друга или постоянные или стремятся к бесконечности, предполагая $\operatorname{Re} b = O_L(1)$, $\operatorname{Re}(c - b) = O_L(1)$ и $b = o(a^{1/2-\delta})$, $c = o(a^{1/2-\delta})$, $\delta > 0$.

Asymptotic representations of the hypergeometric function $F(a, b; c; z)$ are derived where b and $c - b$ either constants or tend to infinity independently of one another provided that $\operatorname{Re} b = O_L(1)$, $\operatorname{Re}(c - b) = O_L(1)$ and $b = o(a^{1/2-\delta})$, $c = o(a^{1/2-\delta})$, $\delta > 0$.

In [8, 9] werden asymptotische Darstellungen bzw. Entwicklungen der hypergeometrischen Funktion $F(a, b; c; z)$ für $|a| \to \infty$ und konstante Werte b, c, z angegeben. Asymptotische Entwicklungen für den Fall, daß auch $|b|$ oder (und) $|c|$ gegen Unendlich streben, sind in [6, 10] hergeleitet, wobei vorausgesetzt wird, daß die Beträge nicht konstant gehaltener Parameter von gleicher Größenordnung gegen Unendlich streben. In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß die Darstellungen aus [8] auch dann gelten, wenn b und $c - b$ unabhängig voneinander konstant sind oder bei nach unten beschränkten Realteilen schwächer als $\sqrt{a}$ gegen Unendlich streben.

1. Bezeichnungen

Mit den Indizes 1 und 2 werden die Realteile bzw. Imaginärteile, mit entsprechenden griechischen Buchstaben die Hauptwerte der Argumente der Parameter a, b, c bezeichnet, also

$$a = a_1 + ia_2 = |a| e^{i\alpha}, \qquad \alpha = \operatorname{Arg} a \in (-\pi, \pi].$$

Es sei $z = x + iy = |z| e^{i\zeta} \in G$, $\zeta = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$, wobei G die längs der reellen Achse von 1 nach Unendlich aufgeschnittene z-Ebene ($|\arg (1 - z)| < \pi$) unter Ausschluß des Nullpunktes ist. Für jede komplexe Zahl w sei stets $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$ und $\operatorname{Log} w = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w$. Als konstant bezeichnen wir solche Größen, die von keinem der Parameter a, b, c abhängen, insbesondere wird stets z als konstant betrachtet.

2. Hauptsatz

Die wesentlichen Resultate der in der vorliegenden Arbeit angestellten Untersuchungen lassen sich im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 1: *Für jedes feste $z \in G$, $|a| \to \infty$ und unabhängig voneinander konstante oder betragsmäßig gegen Unendlich strebende komplexe Parameterwerte b und $c - b$ gelten unter den Voraussetzungen*

$$b = o(a^{1/2-\delta}), \quad c = o(a^{1/2-\delta}) \qquad (\delta > 0 \text{ konstant}), \tag{1}$$

$$b_1 = O_L(1), \qquad c_1 - b_1 = O_L(1), \tag{2}$$

$$c \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{3}$$

die asymptotischen Darstellungen

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} (-az)^{-b} \big(1 + o(1)\big)$$
$$+ \lambda \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} (1-z)^{c-b-a} (-az)^{b-c} \big(1 + o(1)\big). \tag{4}$$

Dabei ist

$$\lambda = e^{-\pi i(c-b)}, \text{ arg } (-az) \in (-3\pi/2, \pi/2),$$

falls

$$y > 0, \ a_1 \geqq 0 \text{ oder } z < 0, \ a_2 < 0 \text{ oder } y < 0, \ a_1 < 0 \text{ oder } 0 < z < 1,$$
$$a_2 \geqq 0 \tag{5}$$

ist. In den verbleibenden Fällen

$$y > 0, a_1 < 0 \text{ oder } z < 0, a_2 \geqq 0 \text{ oder } y < 0, a_1 \geqq 0 \text{ oder } 0 < z < 1,$$
$$a_2 < 0 \tag{6}$$

ist

$$\lambda = e^{\pi i(c-b)}, \quad \text{arg } (-az) \in (-\pi/2, 3\pi/2).$$

Bemerkungen: 1. Ist entweder b oder $c - b$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl, so gilt (4) mit $1/\Gamma(b) = 0$ bzw. $1/\Gamma(c-b) = 0$. Wegen (3) können b und $c - b$ nicht gleichzeitig verschwinden oder negativ ganzzahlig sein. Der Beweis dieser Spezialfälle für konstante b und c in [8] bleibt auch dann uneingeschränkt gültig, wenn b oder c gegen Unendlich streben. Im Beweis von Satz 1 kann deshalb stets vorausgesetzt werden, daß keine der Zahlen b, c und $c - b$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

2. Streben b, c oder $c - b$ gegen Unendlich, empfiehlt sich in der Regel das Einsetzen der Stirlingschen Formel für die betreffende Gammafunktion, woraus sich weitere Vereinfachungen auf der rechten Seite von (4) ergeben können.

3. Für jedes feste $z \in G$ ist nach (5) und (6) jeweils eine Koordinatenachse der komplexen a-Ebene Gültigkeitsgrenze zwischen den beiden möglichen (sich durch λ und die Wahl von arg $(-az)$ unterscheidenden) Darstellungen (4). Aus den Überlegungen am Ende von Abschnitt 5 und Satz 2 (am Schluß der Arbeit) wird deutlich, daß beim Überschreiten der betreffenden Koordinatenachsen keine sprunghafte Änderung des asymptotischen Verhaltens eintritt und sich die Ungleichungen für a_1, a_2 in (5) und (6) durch entsprechende einseitige Beschränktheitsbedingungen abschwächen lassen.

4. Die Beweisideen aus [8] erweisen sich auch im Fall nichtkonstanter b, c als tragfähig. Ausgangspunkt des Beweises ist auch hier die bekannte Integraldarstellung $(c_1 > b_1 > 0)$

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(t-tz)^{-a}\,dt. \tag{7}$$

Eine formale Übertragung des Beweises aus [8] gestattet eine Verallgemeinerung auf nichtkonstante b, c aber nur unter den im Vergleich zu (1), (2) wesentlich schärferen Bedingungen $b, c = o(\ln |a|)$ und $c_1 > b_1 > 0$ [5], so daß man sich im nachfolgenden Beweis von Satz 1 nur an wenigen Stellen auf Abschätzungen aus [8] oder deren Verallgemeinerungen aus [5] stützen kann.

5. Wegen

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-b-a} F(c-a, c-b; c; z) \tag{8}$$

genügt es, den Beweis zunächst unter der Annahme $a_1 \geqq 0$ zu führen.

3. Darstellung von $F(a, b; c; z)$ für $a_1 \geqq 0$, $\quad b_1, c_1 - b_1 > -n \ (n \in \mathbb{N})$

Es sei $a_1 \geqq 0$ und zunächst $c_1 > b_1 > 0$. Das Integrationsintervall $[0, 1]$ in (8) wird in einen komplexen Integrationsweg deformiert, der längs einer Geraden von 0 bis zu einem Punkt T, von dort längs eines Kreisbogens mit dem Mittelpunkt $1/z$ und hinreichend großem Radius R zu einem Punkt $\tilde{T}$ und von diesem geradlinig zum Punkt 1 führt (s. [8: Abb. 1]). Dabei seien

$$T = T(T_1, z) = -T_1 e^{i\varphi}/z \quad (T_1 > 0 \text{ konstant}), \tag{9}$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}(T_2, z) = 1 - T\left(T_2, \frac{z}{z-1}\right) \quad (T_2 > 0 \text{ konstant}), \tag{10}$$

$$|T - 1/z| = |\tilde{T} - 1/z| = R \quad (R > 0 \text{ konstant, hinreichend groß}), \tag{11}$$

und $\varphi = \varphi(z)$ erfülle die Bedingungen

$$|\varphi| < \pi/4, \qquad \varphi \begin{cases} < 0 & \text{für } a_2 \geqq 0 \\ > 0 & \text{für } a_2 < 0, \end{cases} \tag{12}$$

und

$$\varphi \begin{cases} < \operatorname{Arg} z & \text{für } 0 < \operatorname{Arg} z \leqq \pi, \\ & \qquad \varphi(z) = \varphi\left(\frac{z}{z-1}\right) \text{ für } y < 0,\ 0 < z < 1. \\ > \operatorname{Arg} \frac{z}{z-1} & \text{für } y > 0, \end{cases} \tag{13}$$

Werden die Integrale über die einzelnen Wegstücke in der Reihenfolge ihrer Durchlaufung mit J, J^* und $\tilde{J}$ bezeichnet, so ist nach (7) für $c_1 > b_1 > 0$

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \{J(a, b; c; z; T_1) + J^*(a, b; c; z; T_1, T_2) + \tilde{J}(a, b; c; z; T_2)\}. \tag{14}$$

Mit der Substitution $\tau = 1 - t$ in $\tilde{J}$ erhält man leicht

$$\tilde{J}(a; b; c; z; T_2) = (1 - z)^{-a} J\left(a, c - b; c; \frac{z}{z-1}; T_2\right). \tag{15}$$

Setzt man

$$\varepsilon = T' \, |a|^{-(1+\delta)/2}, \tag{16}$$

so läßt sich J in zwei Teilintegrale J_1 und J_2, erstreckt von 0 bis ε bzw. ε bis T', zerlegen:

$$J(a, b; c; z; T_1) = J_1(a, b; c; z; \varepsilon) + J_2(a, b; c; z; \varepsilon, T_1). \tag{17}$$

Offenbar ist J_1 eine ganze analytische Funktion von c und holomorph bezüglich b für $b_1 > 0$, während J_2 eine ganze analytische Funktion sowohl von b als auch von c ist. Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(b)_\nu = \frac{\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(b)} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \nu = 0, \\ b(b+1)\dots(b+\nu-1) & \text{für} \quad \nu = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{18}$$

ergibt sich durch n-malige partielle Integration

$$\begin{aligned} &J_1(a, b; c; z; \varepsilon) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\varepsilon^{b+\nu}}{(b)_{\nu+1}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (-c+b+1)_\mu (1-\varepsilon)^{c-b-1-\mu} (a)_{\nu-\mu} z^{\nu-\mu} \\ &\quad \times (1-\varepsilon z)^{-a-\nu+\mu} + \frac{(-1)^n}{(b)_n} \int_0^\varepsilon t^{b+n-1} \left[\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} (-c+b+1)_\mu \right. \\ &\quad \left. \times (1-t)^{c-b-1-\mu} (a)_{n-\mu} z^{n-\mu} (1-tz)^{-a-n+\mu}\right] dt. \end{aligned} \tag{19}$$

Durch die rechte Seite von (19) wird J_1 bezüglich b analytisch fortgesetzt in die Halbebene $b_1 > -n$ unter Ausschluß des Nullpunktes und der negativen ganzen Zahlen. Setzt man diese analytische Fortsetzung in (17) ein, so wird J zu einer für alle b und c mit $b_1 > -n$, $b \neq 0, -1, -2, \dots$ holomorphen Funktion. Wegen (15) kann demnach auch $\tilde{J}$ als eine für alle b, c mit $c_1 - b_1 > -n$, $c - b \neq 0, -1, -2, \dots$ holomorphe Funktion angesehen werden. Da J^* eine ganze analytische Funktion von b und c ist, wird durch den aus (19) hervorgehenden Fortsetzungsprozeß die rechte Seite von (14) zu einer für alle b, c mit $b_1 > -n$, $c_1 - b_1 > -n$, b und $c \neq 0, -1, -2, \dots$ holomorphen Funktion. Wegen der Holomorphie von $F(a, b; c; z)$ für alle b, c ($c \neq 0, -1, -2, \dots$) gilt nach dem Identitätssatz (14) also auch dann, wenn für J und $\tilde{J}$ die aus (19), (17) und (15) hervorgehenden analytischen Fortsetzungen eingesetzt werden. Nachfolgend soll (14) in diesem Sinn verstanden werden.

4. Beweis von Satz 1 für $a_1 \geqq 0$

Um den Beweis von Satz 1 übersichtlich zu gestalten, werden wesentliche Teilresultate als Lemmata formuliert. Zunächst wird (außer in Lemma 5) $a_1 \geqq 0$ vorausgesetzt.

Lemma 1: *Für $a_1 \geqq 0$, $b_1 > -n$ (n feste natürliche Zahl), $b \neq 0, -1, -2, \dots$, für alle c und jedes feste $z \in G$ besitzt die durch (19) definierte Funktion unter den Voraus-*

setzungen (1) *die Darstellung*

$$J_1(a, b; c; z; \varepsilon) = (-1)^{n-1}\, \varepsilon^{b+n-1} z^{n-1} e^{a\varepsilon z}\, [(a)_{n-1}/(b)_n]\, [1 + o(1)] + (-1)^n z^n \frac{(a)_n}{(b)_n} \left[I_0 + \sum_{\mu=1}^{n} o(I_\mu) \right] \tag{20}$$

mit

$$I_\mu = I_\mu(a, b; c; z) = \int_0^\varepsilon t^{b+n-1} e^{atz} H_\mu(t; a, b; c; z)\, dt, \tag{21}$$

$$H_\mu = e^{-atz}(1-t)^{c-b-1-\mu}\,(1-tz)^{-a-n+\mu} \to 1 \quad (|a| \to \infty) \tag{22}$$

gleichmäßig bezüglich b, c *und alle* t *mit* $t = O(\varepsilon)$.

Beweis: Aus (1) und (16) folgt gleichmäßig bez. b, c und alle t mit $t = O(\varepsilon)$

$$(1-t)^{c-b-1-\mu} = \exp\{o(a^{-3\delta/2})\} \sim 1 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$(1-tz)^{-a-\nu+\mu} = \exp\{atz + O(a\varepsilon^2)\} \sim \exp(atz) \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Daraus ergibt sich das behauptete Grenzverhalten der H_μ für $|a| \to \infty$ sowie nach (19)

$$J_1 = \varepsilon^{b+n-1} e^{a\varepsilon z} \frac{(a)_{n-1}}{(b)_n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\nu} \left\{ (-1)^\nu \binom{\nu}{\mu} z^{\nu-\mu} \alpha_{\nu\mu}(a, b, c) \left(1 + o(1)\right) \right\} + (-1)^n \frac{(a)_n}{(b)_n} \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} z^{n-\mu} \beta_\mu(a, b, c)\, I_\mu \tag{23}$$

mit

$$\alpha_{\nu\mu} = \varepsilon^{\nu-n+1} \frac{(b)_n(-c+b+1)_\mu\, (a)_{\nu-\mu}}{(b)_{\nu+1}\, (a)_{n-1}}, \quad \beta_\mu = \frac{(-c+b+1)_\mu\, (a)_{n-\mu}}{(a)_n}.$$

Wegen (1) gilt

$$\alpha_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = 0, \nu = n-1, \\ o(1) & \text{für} \quad \mu > 0 \quad \text{und} \quad \mu = 0, \nu < n-1, \end{cases}$$

$$\beta_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = 0, \\ o(1) & \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

so daß (20) aus (23) folgt ∎

Lemma 2: *Für* $a_1 \geqq 0$, $b_1 = O_L(1)$, $b \neq 0, -1, -2, \ldots$, *für alle* c *und jedes feste* $z \in G$ *gelten bei konstantem oder gegen Unendlich strebendem* b *unter den Voraussetzungen* (1) *die asymptotischen Darstellungen*

$$I_\mu \sim \Gamma(b+n)\,(-az)^{-b-n} \quad (|a| \to \infty;\ \mu = 0, 1, \ldots, n). \tag{24}$$

Dabei bedeutet n *eine feste natürliche Zahl mit* $b_1 + n - 1 \geqq 0$, *und es ist*

$$\arg(-az) = \begin{cases} \alpha - \pi & \text{für} \quad 0 < z < 1, \quad a_2 \geqq 0, \\ \alpha + \operatorname{Arg}(-z) & \textit{sonst}. \end{cases} \tag{25}$$

Beweis: Aus (21) erhält man durch die Substitution $t = \varepsilon\tau$

$$I_\mu = \varepsilon^{b+n} \int_0^1 e^{-s\tau} \tau^{b+n-1} H_\mu(\varepsilon\tau, \ldots)\, d\tau \tag{26}$$

mit $s = -a\varepsilon z = T_1 |a|^{(1-\delta)/2} e^{i(\alpha+\varphi)}$ und der nach Lemma 1 für $|a| \to \infty$ gleichmäßig bezüglich b, c und $\tau \in [0, 1]$ gegen 1 strebenden Funktion H_μ. Da α und φ nach (12) verschiedene Vorzeichen besitzen, ist wegen $a_1 \geqq 0$

$$|\alpha + \varphi| = \big||\alpha| - |\varphi|\big| \leqq \pi/2 - |\varphi|, \tag{27}$$

so daß bei konstantem b aus einem klassischen Abelschen Satz für die Laplace-Transformation [3, 4] unmittelbar (24) folgt.

Im folgenden wird $|b| \to \infty$ vorausgesetzt. Der Integrationsweg von 0 nach ε wird in einen aus drei Geradenstücken von 0 bis $x - \omega$, $x - \omega$ bis $x + \omega$ und $x + \omega$ bis ε^* sowie einem Kreisbogen um 0 von ε^* bis ε bestehenden Weg deformiert. Dabei seien

$$x = \tilde{b}/(-az), \qquad \tilde{b} = b + n - 1 \qquad \arg x = \operatorname{Arg} T - \varphi + \tilde{\beta} - \alpha, \tag{28}$$

$$\omega = x\,|\tilde{b}^{1/4}z|/\sqrt{\tilde{b}}, \qquad \tilde{\beta} = \operatorname{Arg} \tilde{b} \tag{29}$$

$$\varepsilon^* = x + \tau_0\omega \quad \text{mit} \quad \tau_0 > 1 \quad \text{und} \quad |\varepsilon^*| = |\varepsilon|. \tag{30}$$

Offenbar gilt $\omega = o(x)$ und $x = o(\varepsilon)$, so daß H_μ nach Lemma 1 auf allen Abschnitten des neuen Integrationsweges für $|a| \to \infty$ gleichmäßig gegen 1 strebt. Die Teilintegrale über die einzelnen Wegabschnitte bezeichnen wir in der Reihenfolge ihrer Durchlaufung mit $I_{\mu 1}$ bis $I_{\mu 4}$. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen vereinbaren wir für jede von t und weiteren Parametern abhängige Funktion $k(t, \ldots)$ die Bezeichnung $k_\nu(t, \ldots) = \partial^\nu k(t, \ldots)/\partial t^\nu$ [3].

Für $k(t; a, \tilde{b}; z) = -atz - \tilde{b} \log t$ erhält man

$$k_1(x; a, \tilde{b}; z) = o, \quad k_2(x; a, \tilde{b}; z) = \tilde{b}/x^2 \sim b/x^2.$$

Wählt man $\sqrt{k_2(x; a, \tilde{b}; z)} = \sqrt{\tilde{b}}/x$, so gelten die Beziehungen

$$\omega\sqrt{k_2(x; a, \tilde{b}; z)} = |\tilde{b}^{1/4}z| \to \infty,$$

$$k_2(x + \vartheta\omega; a, \tilde{b}; z) \sim k_2(x; a, \tilde{b}; z) \text{ gleichmäßig für alle } \vartheta \in [-1, 1].$$

Aus ihnen folgt nach BERG [3: Satz 20.3]

$$I_{\mu 2} = \int_{x-\omega}^{x+\omega} t^{b+n-1} e^{atz} H_\mu \, dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k_2(x; a, \tilde{b}; z)}}\, e^{-k(x; a, k; z)}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{b}}\, e^{-\tilde{b}} x^{\tilde{b}+1} \quad (|a| \to \infty) \tag{31}$$

oder mit (28) und der Stirlingschen Formel

$$I_{\mu 2} \sim \Gamma(b + n)\,(-az)^{-b-n}, \tag{32}$$

wobei $\arg(-az)$ den in (25) angegebenen Wert besitzt.

Setzt man

$$\varrho = \operatorname{Re}\{az(x - \omega)\} = -\tilde{b}_1 + |\tilde{b}^{3/4}z| \cos(\tilde{\beta}/2) \quad \text{und} \quad k(\tau, \varrho) = \varrho\tau$$
$$+ (b_1 + n - 1) \ln \tau,$$

so ist $k_1 = \varrho + \tilde{b}_1/\tau$ eine positive und monoton fallende Funktion von τ in $(0, 1)$, und es gilt

$$|I_{\mu 1}| = \left|\int_0^{x-\omega} t^{b+n-1} e^{atz} H_\mu \, dt\right| \leqq 2\,|(x - \omega)^{b+n}| \int_0^1 e^{k(\tau, \varrho)} \, d\tau \tag{33}$$

sowie

$$\int_0^1 e^{k(\tau,\varrho)}\,d\tau \leqq \frac{1}{k_1(1,\varrho)}\int_0^1 e^{k(\tau,\varrho)}k_1(\tau,\varrho)\,d\tau \leqq \frac{e^{k(1,\varrho)}}{k_1(1,\varrho)} = \frac{e^{\varrho}}{\varrho+\bar{b}_1}. \tag{34}$$

Aus (33) und (34) folgt unter Berücksichtigung von

$$|(x-\omega)^{b+n}| = |x^{b+n}|\exp\left\{-|\bar{b}^{1/4}z|\,\mathrm{Re}\sqrt{\bar{b}} - \frac{1}{2}|\bar{b}^{1/4}z|^2\bigl(1+o(1)\bigr)\right\}$$

die Abschätzung

$$I_{\mu 1} = O\left(x^{b+n}b^{-3/4}\exp\left\{-\bar{b} - \frac{1}{2}|b^{1/4}z|^2\bigl(1+o(1)\bigr)\right\}\right) \tag{35}$$

und hieraus wegen (31)

$$I_{\mu 1} = o(I_{\mu 2}) \qquad (|a|\to\infty). \tag{36}$$

Es ist weiterhin

$$|I_{\mu 3}| = \left|\int_{x+\omega}^{\varepsilon^*} t^{b+n-1}e^{atz}H_\mu dt\right| \leqq 2|x^{b+n-1}\omega e^{-\bar{b}}|\int_1^{\tau_0}\exp[\mathrm{Re}\,\{k(\tau;a,\bar{b};z)\}]\,d\tau \tag{37}$$

mit $k(\tau;a,\bar{b};z) = \bar{b}\log(1+\tau\omega/x) + az\omega\tau$. Wegen $\bar{b}_1 \geqq 0$ ist $|\arg(\omega/x)| = |\bar{\beta}|/2 \leqq \pi/4$ und deshalb für $\tau \geqq 1$

$$\mathrm{Re}\,\{k_2(\tau;a,\bar{b};z)\} = -|\bar{b}^{1/4}z|^2\,\mathrm{Re}\,\{(1+\tau\omega/x)^{-2}\} < 0,$$

folglich

$$\mathrm{Re}\,\{k_1(\tau;a,\bar{b};z)\} \leqq \mathrm{Re}\,\{k_1(1;a,\bar{b};z)\} \sim -|b^{1/4}z|^2 < 0.$$

Man erhält so

$$\int_1^{\tau_0}\exp[\mathrm{Re}\,\{k(\tau;a,\bar{b};z)\}]\,d\tau \leqq \frac{\exp[\mathrm{Re}\,\{k(1;a,\bar{b};z)\}]}{-\mathrm{Re}\,\{k_1(1;a,\bar{b};z)\}}$$
$$\sim \exp\left[-\frac{1}{2}|b^{1/4}z|^2\bigl(1+o(1)\bigr)\right]. \tag{38}$$

Zusammenfassend ergibt sich aus (31), (37) und (38)

$$I_{\mu 3} = o(I_{\mu 2}) \qquad (|a|\to\infty). \tag{39}$$

Wählt man für den kreisbogenförmigen Integrationsweg von ε^* nach ε in $I_{\mu 4}$ die Parameterdarstellung $t = (x/\bar{b})\,|\varepsilon az|\,e^{iu}$, so erhält man unter Beachtung von (22), $|t^{b+n-1}| = |\varepsilon|^{b_1+n-1}\,e^{O(b)}$ und $|\exp(atz)| = \exp(-|\varepsilon az|\cos u)$ die Abschätzung

$$|I_{\mu 4}| = \left|\int_{\varepsilon^*}^{\varepsilon} t^{b+n-1}e^{atz}H_\mu\,dt\right| \leqq |\varepsilon|^{b_1+n}e^{O(b)}\int_{u_0}^{u_1}\exp(-|\varepsilon az|\,u\cos u)\,|du| \tag{40}$$

mit $u_0 = \arg(\varepsilon^*\bar{b}/x)$ und $u_1 = \arg(\varepsilon\bar{b}/x)$. Wegen $|\varepsilon| = |\varepsilon^*| = |x|\,|1+\tau_0\omega/x|$ und $x = o(\varepsilon)$ gilt $|\tau_0\omega/x|\to\infty$, so daß $\varepsilon^*\sim\tau_0\omega$ ist. Daraus folgt $\varepsilon^*\bar{b}/x \sim \tau_0\omega\bar{b}/x = \tau_0\sqrt{\bar{b}} \times|\bar{b}^{1/4}z|$ und mithin $u_0 = \beta/2 + o(1)$. Andererseits ist $u_1 = \arg(-az\varepsilon) = \alpha+\varphi$ und nach (27) $|\alpha+\varphi| \leqq \pi/2 - |\varphi|$. Demnach ist für hinreichend große $|a|$ und $|b|$ das

Integrationsintervall in (40) ein abgeschlossenes Teilintervall von $(-\pi/2, \pi/2)$, also $|\cos u| \geqq \mu > 0$ (μ konstant). Folglich gilt wegen $|\varepsilon a z| = T_1 |a|^{(1-\delta)/2}$ und (1)

$$|I_{\mu 4}| \leqq |\varepsilon|^{b_1+n} \exp\left(-\mu' |a|^{(1-\delta)/2}\right) \qquad (0 < \mu' < \mu), \tag{41}$$

woraus mit (31) und unter Berücksichtigung der Abschätzungen

$$|\varepsilon|^{b_1+n}/|x^{b+n}| = |\varepsilon/x|^{b_1+n} \exp\{O(b)\} = \exp\{O(b \ln |a|)\} = \exp\{o(a^{(1-\delta)/2})\}$$

schließlich

$$I_{\mu 4} = o(I_{\mu 2}) \qquad (|a| \to \infty) \tag{42}$$

folgt. Aus (32), (36), (39) und (42) ergibt sich nunmehr die Behauptung von Lemma 2 ∎

Lemma 3: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 gilt*

$$J(a, b; c; z; T_1) \sim \Gamma(b)\,(-az)^{-b} \qquad (|a| \to \infty), \tag{43}$$

wobei $\arg(-az)$ *durch* (25) *festgelegt ist.*

Beweis: Nach Lemma 2 haben alle I_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$ dieselbe asymptotische Darstellung (24), so daß aus (20)

$$\begin{aligned} J_1 &= (-1)^{n-1} \varepsilon^{b+n-1} z^{n-1} e^{a\varepsilon z}[(a)_{n-1}/(b)_n]\big(1 + o(1)\big) \\ &\quad + (-1)^n z^n \Gamma(b+n)\,(-az)^{-b-n}\,[(a)_n/(b)_n]\big(1 + o(1)\big) \\ &= (-1)^n z^n [(a)_n/(b)_n]\,\Gamma(b+n)\,(-az)^{-b-n}\,\{1 + o(1) \\ &\quad + (-a\varepsilon z)^{b+n-1} e^{a\varepsilon z}\big(1 + o(1)\big)/\Gamma(b+n)\} \end{aligned}$$

folgt. Wegen $(a)_n \sim a^n$, $\Gamma(b+n)/(b)_n = \Gamma(b)$, $a\varepsilon z = -T_1 |a|^{(1-\delta)/2} e^{i(\alpha+\varphi)}$, (27) und, falls $|b| \to \infty$, mit der Stirlingschen Formel und (1) erhält man schließlich

$$J_1(a, b; c; z; \varepsilon) \sim \Gamma(b)\,(-az)^{-b} \qquad (|a| \to \infty). \tag{44}$$

Nach (17) bleibt $J_2 = o(J_1)$ nachzuweisen. Der Integrationsweg von ε nach T im Integral J_2 hat wegen (13) einen von a unabhängigen positiven Abstand vom Punkt $t = 1$ und ist von beschränkter Länge, so daß auf ihm nach (1)

$$(1-t)^{c-b-1} = \exp\{o(a^{1/2-\delta})\} \tag{45}$$

gilt. Ferner ist nach (1) und (16)

$$\begin{aligned} |t^{b-1}| &= |t|^{b_1-1}\, e^{-b_2 \arg t} = |t|^{-n}\, |t|^{b_1+n-1} e^{O(b)} \\ &\leqq |\varepsilon|^{-n}\, |T|^{b_1+n-1} e^{O(b)} = \exp\{o(|a|^{1/2-\delta})\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Aus [8] übernehmen wir mit einer kleinen Modifikation ($|a|^{-3/4}$ ist durch $|a|^{-(1+\delta)/2}$ und $|a|^{1/4}$ durch $|a|^{(1-\delta)/2}$ zu ersetzen) die Abschätzung

$$|(1-tz)^{-a}| \leqq \exp\{-\mu\, |a|^{(1-\delta)/2}\} \quad (\mu > 0 \text{ konstant}). \tag{47}$$

Aus (45)—(47) erhält man

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_\varepsilon^T t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt \\ &= O\left(\exp\{-\mu'\, |a|^{(1-\delta)/2}\}\right) \quad (0 < \mu' < \mu). \end{aligned} \tag{48}$$

Ist b konstant, so folgt (43) unmittelbar aus (44) und (48). Strebt $|b| \to \infty$, so erhält man unter Verwendung der Stirlingschen Formel aus (44) und (48)

$$\begin{aligned} J_2/J_1 &= O\left(\sqrt{b}\, e^b b^{-b} (-az)^b \exp\{-\mu' |a|^{(1-\delta)/2}\}\right) \\ &= O(\exp\{-\mu'' |a|^{(1-\delta)/2}\}) = o(1) \qquad (0 < \mu'' < \mu') \ \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma 4: *Ist $c - b$ konstant oder strebt $|c - b|$ gegen Unendlich, so gilt unter den Voraussetzungen $a_1 \geqq 0$, $c_1 - b_1 = O_L(1)$, $c - b \neq 0, -1, -2, \ldots$ und (1) für jedes feste $z \in G$*

$$\tilde{J}(a, b; c; z; T_2) \sim \lambda \Gamma(c - b)\, (1 - z)^{c-b-a}\, (-az)^{b-c}, \tag{49}$$

wobei $\arg(-az)$ *und* $\lambda = e^{\pm \pi i (c-b)}$ *durch* (25) *bzw. gemäß Satz* 1 *eindeutig bestimmt sind.*

Beweis: Durch einfache Rechnung erhält man die Behauptung aus (15) unter Verwendung von Lemma 3 ∎

Lemma 5: *Für alle a, b, c und jedes $z \in G$ genügt*

$$J^*(a, b; c; z; T_1, T_2) = \int_T^{\tilde{T}} t^{b-1} (1 - t)^{c-b-1}\, (1 - tz)^{-a}\, dt$$

der Gleichung

$$J^*\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}; T_2, T_1\right) = (1 - z)^a J^*(a, b; c; z; T_1, T_2). \tag{50}$$

Beweis: Nach (14) und (15) gilt für $c_1 > b_1 > 0$, $z \in G$ und beliebiges a

$$\begin{aligned} J^*(a, b; c; z; T_1, T_2) = {} & \frac{\Gamma(b)\, \Gamma(c - b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) \\ & - J(a, b; c; z; T_1) - (1 - z)^{-a} \\ & \times J\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}; T_2\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Die angegebenen Gültigkeitsbedingungen bleiben invariant, wenn man in (51) b durch $c - b$ und z durch $z/(z - 1)$ ersetzt sowie T_1 und T_2 miteinander vertauscht:

$$\begin{aligned} J^*\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}; T_2, T_1\right) = {} & \frac{\Gamma(b)\, \Gamma(c - b)}{\Gamma(c)} F\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}\right) \\ & - J\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}; T_2\right) \\ & - (1 - z)^a J(a, b; c; z; T_1). \end{aligned} \tag{52}$$

Wegen der bekannten Beziehung $F(a, c - b; c; z/(z - 1)) = (1 - z)^a F(a, b; c; z)$ folgt aus (51) und (52) die Behauptung (50) für $c_1 > b_1 > 0$. Da beide Seiten der Gleichung (50) ganze analytische Funktionen von b und c sind, gilt (50) nach dem Fortsetzungsprinzip für alle b, c ∎

Lemma 6: *Unter den gemeinsamen Voraussetzungen der Lemmata 2 und 4 gilt*

$$\begin{aligned} & J^*(a, b; c; z; T_1, T_2) \\ & = \begin{cases} o(J(a, b; c; z; T_1)) & \text{für } y > 0, a_2 \geqq 0 \text{ und } y < 0, a_2 < 0 \text{ und } z < 0, \\ o(\tilde{J}(a, b; c; z; T_2)) & \text{für } y > 0, a_2 < 0 \text{ und } y < 0, a_2 \geqq 0 \text{ und } 0 < z < 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{53}$$

Beweis: Auf dem Kreisbogen von T nach $\tilde{T}$ um den Punkt $1/z$ mit einem hinreichend großen, von a unabhängigen Radius R gilt nach (1)

$$t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} = \exp\{o(a^{1/2-\delta})\}. \tag{54}$$

Aus [8] entnehmen wir für $y > 0$ und $z < 0$ die Abschätzungen

$$|(1-tz)^{-a}| \leqq \begin{cases} e^{-\mu|a|} & \text{für} \quad y > 0,\, a_2 \geqq 0 \quad \text{und} \quad z < 0, \\ (1-z)^{-a} e^{-\mu|a|} & \text{für} \quad y > 0, a_2 < 0 \qquad (\mu > 0 \,\text{konstant}). \end{cases} \tag{55}$$

Aus (54) und (55) erhält man wegen der von a unabhängigen Länge des Integrationsweges

$$J^*(a, b; c; z; T_1, T_2) = \begin{cases} O(e^{-\mu'|a|}) & \text{für} \quad y > 0,\, a_2 \geqq 0 \quad \text{und} \quad z < 0, \\ O\big((1-z)^{-a} e^{-\mu'|a|}\big) & \text{für} \quad y > 0,\, a_2 < 0. \end{cases} \tag{56}$$

Für $y < 0$ und $0 < z < 1$ ergeben sich aus (50) und (56) die Abschätzungen

$$J^*(a, b; c; z; T_1, T_2) = \begin{cases} O(e^{-\mu'|a|}) & \text{für} \quad y < 0,\, a_2 < 0, \\ O\big((1-z)^{-a} e^{-\mu'|a|}\big) & \text{für} \quad y < 0,\, a_2 \geqq 0 \quad \text{und} \quad 0 < z < 1. \end{cases} \tag{57}$$

Aus (43), (49), (56) und (57) folgt (53) ∎

Ausgehend von der Zerlegung (14) liefern die Lemmata 3, 4 und 6 den Beweis von Satz 1 unter der Zusatzbedingung $a_1 \geqq 0$.

5. Beweis von Satz 1 für $a_1 < 0$

Wir setzen voraus, daß b und c die Bedingungen von Satz 1 erfüllen und außerdem b und $c - b$ weder gleich Null noch negativ ganzzahlig sind. Dann existiert wegen (2) eine natürliche Zahl n, so daß $c_1 > -n$ ist. Nehmen wir zunächst $a_1 \leqq -n$ an und setzen $a' = c - a$, $b' = c - b$, $c' = c$, so ist $a_1' > 0$ und b' und c' erfüllen offenbar ebenfalls alle an b bzw. c gestellten Forderungen. Folglich gelten für $F(a', b'; c'; z)$ die asymptotischen Darstellungen (4). Da sich (8) mit den neuen Bezeichnungen auch in der Form $F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-b-a} F(a', b'; c'; z)$ schreiben läßt, erhält man für $a_1 \leqq -n$

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-b-a} \Big\{ & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} [-(c-a)\, z]^{b-c} \big(1 + o(1)\big) \\ & + \lambda' \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} (1-z)^{a+b-c} [-(c-a)\, z]^{-b} \big(1 + o(1)\big)\Big\} \end{aligned} \tag{58}$$

mit $\lambda' = e^{-\pi i(c'-b')} = e^{-\pi i b}$, $\arg[-(c-a)\, z] \in (-3\pi/2, \pi/2)$ für

$$y > 0 \quad \text{und} \quad z < 0,\; a_2 > c_2 \quad \text{und} \quad 0 < z < 1, \qquad a_2 \leqq c_2 \tag{59}$$

sowie $\lambda' = e^{\pi i b}$, $\arg[-(c-a)\, z] \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ für

$$y < 0 \quad \text{und} \quad z < 0, \quad a_2 \leqq c_2 \quad \text{und} \quad 0 < z < 1; \quad a_2 > c_2. \tag{60}$$

Offenbar gilt in den Fällen (59)

$$\arg[-(c-a)\, z] = \arg(-az) - \pi + o(1) \quad \text{mit} \quad \arg(-az) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$$

und in den Fällen (60)

$$\arg[-(c-a)z] = \arg(-az) + \pi + o(1) \quad \text{mit} \quad \arg(-az) \in (-3\pi/2, \pi/2),$$

so daß man aus (58) wieder (4) erhält, wobei λ und $\arg(-az)$ wie folgt bestimmt sind:

$$\lambda = e^{\pi i(c-b)}, \ \arg(-az) \in (-\pi/2, 3\pi/2) \quad \text{in den Fällen (59)},$$
$$\lambda = e^{-\pi i(c-b)}, \ \arg(-az) \in (-3\pi/2, \pi/2) \quad \text{in den Fällen (60)}.$$

Damit ist Satz 1 auch für $a_1 \leqq -n$ $(b, c, c-b \neq 0, -1, -2, \ldots)$ bewiesen, wenn man zunächst davon absieht, daß im Falle reeller z die beiden möglichen Darstellungen (4) nicht, wie in Satz 1 angegeben, durch $a_2 = 0$ sondern durch $a_2 = c_2$ getrennt werden.

Die bekannte Funktionalgleichung [2]

$$(c-a) F(a-1, b; c; z) + (2a - c - az + bz) F(a, b; c; z)$$
$$+ a(z-1) F(a+1, b; c; z) = 0 \tag{61}$$

erlaubt nun die Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der Darstellungen (4) aus der Halbebene $a_1 \leqq -n$ in die Halbebene $a_1 \leqq 0$. Offenbar folgt aus (61), wenn man noch a durch $a-1$ ersetzt,

$$F(a, b; c; z) = \frac{2-z}{1-z} F(a-1, b; c; z)\big(1 + o(1)\big)$$
$$- \frac{1}{1-z} F(a-2, b; c; z)\big(1 + o(1)\big). \tag{62}$$

Ist $a \leqq -n+1$, so können für die Funktionen auf der rechten Seite dieser Gleichung die Darstellungen (4) eingesetzt werden. Nach einfacher Rechnung erhält man für $F(a, b; c; z)$ wiederum (4). Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann der Gültigkeitsbereich von Satz 1 sukzessive auf die Halbebene $a_1 \leqq 0$ ausgedehnt werden.

Es bleibt noch zu zeigen, daß für reelle z und $a_1 < 0$ die Trennbedingung $a_2 = c_2$ für die beiden möglichen Darstellungen (4) durch $a_2 = 0$ ersetzt werden kann. Ist $0 < z < 1$ und $|a_2| \leqq |c_2|$, so liefert (4) sowohl im Fall $a_2 \leqq c_2$ $(c_2 > 0)$ als auch im Fall $a_2 \geqq c_2$ $(c_2 < 0)$ äquivalente asymptotische Darstellungen, nämlich

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} (-az)^{-b} \{1 + o(1) + (1-z)^{-a} \exp[o(a^{(1-\delta)/2})]\}$$
$$\sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)} (-az)^{-b} \qquad (|a| \to \infty). \tag{63}$$

mit $\arg(-az) = \operatorname{Arg}(-a) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Entsprechend erhält man für $z < 0$, $a_1 < 0$, $|a_2| \leqq |c_2|$ die einheitliche Darstellung

$$F(a, b; c; z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} (1-z)^{c-b-a} (az)^{b-c}, \ \arg(az) = \operatorname{Arg}(-a). \tag{64}$$

6. Spezialfälle

Die speziellen asymptotischen Darstellungen (63) oder (64) sind auch unter allgemeineren Bedingungen als den am Ende des vorigen Abschnitts angegebenen gültig, wie aus folgendem Satz hervorgeht.

Satz 2: *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 reduziert sich* (4) *auf die asymptotische Darstellung* (63) *mit* arg $(-az) \in (-\pi, \pi]$, *falls*

$$\operatorname{Im}\{z\} = 0 \quad \textit{und} \quad |\arg(-az)| \leqq \pi/2 - \psi \quad (\psi > 0 \text{ konstant}) \tag{65}$$

oder

$$\operatorname{Im}\{z\} \neq 0, \qquad a_1 = o(a_2), \qquad a_2 y \to +\infty. \tag{66}$$

ist. Es gilt (64) *mit* arg $(az) \in (-\pi, \pi]$ *für*

$$\operatorname{Im}\{z\} = 0, \qquad |\arg(az)| \leqq \pi/2 - \psi \qquad (\psi > 0 \textit{ konstant}) \tag{67}$$

und

$$\operatorname{Im}\{z\} \neq 0, \qquad a_1 = o(a_2), \qquad a_2 y \to -\infty \tag{68}$$

Der Beweis ergibt sich bei beiden Varianten daraus, daß

$$|(1-z)^{c-b-a}| = \exp\{o(a^{1/2-\delta}) - a_1 \ln|1-z| + a_2 \operatorname{Arg}(1-z)\}$$

unter den Bedingungen (65) und (66) mindestens wie $\exp\{-\mu\,|a|\}$ gegen Null strebt und unter den Bedingungen (67) und (68) stärker als $\exp\{\mu\,|a|\}$ wächst (μ bezeichnet in beiden Fällen eine geeignete positive Konstante) ∎

Aus Satz 2 folgt, daß die in (5) und (6) auftretenden Ungleichungen für a_1, a_2 durch entsprechende einseitige Beschränktheitsbedingungen ersetzt werden können.

LITERATUR

[1] ABRAMOWITZ, M., and I. A. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications Inc. 1965.

[2] BATEMAN, H., and A. ERDÉLYI: Higher Transcendental Functions, Vol. 1. New York—Toronto—London: Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1953.

[3] BERG, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1968.

[4] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I (Nachdruck der 1. Auflage). Basel—Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1971.

[5] KLEINDT, B.: Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b; c; z)$ bei unbegrenzt wachsenden Parametern a, b, c. Diplom-Arbeit. Halle—Wittenberg: Martin-Luther-Universität 1984.

[6] PERRON, O.: Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter I, II. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. 7 no. 9 (1916) und 8 no. 1 1917.

[7] RYSHIK, I. M., und I. S. GRADSTEIN: Summen-, Produkt- und Integraltafeln (Übers. a. d. Russ.; 2. Aufl.). Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1963.

[8] WAGNER, E.: Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktionen für große Werte eines Parameters. Z. Anal. Anw. **1** (1982) 3, 1—11.

[9] WAGNER, E.: Asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b; c; z)$ für $|a| \to \infty$ und konstante c, b, z. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 213—226.

[10] WATSON, G. N.: Asymptotic expansions of hypergeometric functions. Trans. Cambridge Philosophical Soc. **22** (1918), 277—308.

Manuskripteingang: 27. 07. 1984

VERFASSER:

Dr. sc. EBERHARD WAGNER
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle, Universitätsplatz 6