

## Zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ II<sup>1)</sup>

W. KLIESCH

In diesem Teil der Arbeit werden aus den im ersten Teil eingeführten Darstellungen des Abbildungsgrades spezielle Formeln abgeleitet, die teilweise Verallgemeinerungen bekannter Formeln sind. Damit wird eine Möglichkeit zur einheitlichen Behandlung der in der numerischen Analysis gebräuchlichen Formeln zur Bestimmung des Abbildungsgrades gegeben. Es wird weiterhin gezeigt, wie der Abbildungsgrad unter Verwendung von Kuhnsimplex zur Existenzsicherung und Fehlerabschätzung von Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme eingesetzt werden kann. Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse einiger Testrechnungen angegeben.

В этой части работы выводятся из введенных в первой части представлений степени отображения специальные формулы, которые частично являются обобщениями уже известных формул. Таким образом, получается возможность единого рассмотрения принятых в численном анализе формул для определения степени отображения. Далее, показывается, как можно использовать степень отображения — пользуясь симплексами Куна — для обеспечения существования и для оценки погрешности решений систем нелинейных уравнений. В конце приводятся результаты некоторых проверочных расчетов.

In this part of the paper, special formulas are deduced from the representations of the topological degree introduced in the first part. Partially, these formulas are generalizations of wellknown formulas. Thus, possible means are given for unified approach to the computational formulas for the topological degree used in numerical analysis. Further it is shown how, using Kuhnsimplices, the topological degree can be used for existence proofs and error estimations for zeros of nonlinear equations. Results of some computational tests are given in the last section.

### 0. Einleitung

Nachdem im ersten Teil [5] dieser Arbeit zwei implementierbare Darstellungen des Abbildungsgrades — die Kubus- und die Oktaederdarstellung — eingeführt worden sind, werden in diesem Teil spezielle Berechnungsformeln aus diesen Darstellungen abgeleitet. Es handelt sich dabei teilweise um Verallgemeinerungen bekannter Formeln (vgl. [4, 7, 9—11]). Damit ist eine Möglichkeit zur einheitlichen Behandlung der für die numerische Analysis interessanten Formeln zur Berechnung des Abbildungsgrades gegeben.

Im ersten Abschnitt findet der Leser eine Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen. Der zweite Abschnitt befaßt sich mit der Herleitung von Formeln aus der Kubusdarstellung. Eine aus der Oktaederdarstellung ableitbare Formel wird im dritten Abschnitt betrachtet. Zum Abschluß der Arbeit wenden wir uns praktischen Fragen zu. Es wird ein Algorithmus angegeben, der zur Existenzsicherung

<sup>1)</sup> Teil I erschien im Heft 4 (1984) dieser Zeitschrift.

von Lösungen bei nichtlinearen Gleichungssystemen dient (Abschnitt 4). Hier wird zu einer Näherungsformel  $\bar{x}$  der Gleichung  $\Phi(x) = 0$ ,  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , und vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein Simplex mit dem Durchmesser  $\varepsilon$  konstruiert, für das dann der Abbildungsgrad bez.  $\Phi$  berechnet wird. Dabei erhält man eine Fehlerabschätzung für  $\bar{x}$ . Der Algorithmus wurde unter Verwendung der Stengerschen Formel zur Berechnung des Abbildungsgrades anhand einiger ausgewählter Beispiele getestet. Die Testergebnisse sind im Abschnitt 5 enthalten.

## 1. Bezeichnungen

Alle im ersten Teil [5] eingeführten Begriffe und Bezeichnungen werden beibehalten. Zum besseren Verständnis sei kurz an die wichtigsten Bezeichnungen erinnert. Es ist

$P^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , ein  $n$ -dimensionales Polyeder;

$M$  eine Triangulation von  $P^n$ ;

$T = \text{Rd}(M)$  der Randkomplex von  $M$ ;

$W^n$  der  $n$ -dimensionale Einheitswürfel des  $\mathbb{R}^n$ ;

$K$  eine Triangulation von  $W^n$ ;

$L = \text{Rd}(K)$  der Randkomplex von  $K$ ;

$O^n$  das  $n$ -dimensionale Einheitsoktaeder des  $\mathbb{R}^n$ ;

$K^0$  die natürliche Triangulation von  $O^n$ ;

$E(Q)$  die Menge der Eckpunkte des Komplexes  $Q$ ;

$Q_k$  die Menge der  $k$ -Simplexe ( $0 \leq k \leq n$ ) des Komplexes  $Q$ ;

$F$  die Menge der ganzen Zahlen;  $N := \{1, \dots, n\}$  und  $N_0 = N \cup \{0\}$ .

## 2. Formeln vom $W^n$ -Typ

Alle Formeln zur Berechnung des Abbildungsgrades, die sich aus der Kubusdarstellung (s. Teil I, Theorem 2) ableiten lassen, werden als *Formeln vom  $W^n$ -Typ* bezeichnet.

### 2.1. Die Stengersche Formel

Die Stengersche Formel (vgl. [9]) erhält man, indem man für  $W^n$  eine spezielle Triangulation annimmt, die im folgenden untersucht werden soll. Es sei

$$E := \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i| = 1, i = 1(1)n\}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\text{conv } E = W^n \quad \text{und} \quad E \subseteq \text{h}(W^n)$$

gilt. Ist  $\pi: N \rightarrow N$  eine Permutation,  $u^i = (u_1^i, \dots, u_n^i)^T$  der  $i$ -te Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^n$  (d. h.  $u_j^i = \delta_{ij}$ ) und  $a^0 = e \in E$ , so sind die Punkte

$$a^0, a^i = a^{i-1} - 2e_{\pi(i)}u^{\pi(i)}, \quad i = 1(1)n, \quad (1)$$

affin unabhängig und spannen ein  $n$ -dimensionales Simplex  $s[e, \pi]$  auf, das als *Kuhnsimplex* bezeichnet wird. Die Numerierung der Eckpunkte eines Kuhnsimplexes ist durch die Vorschrift (1) in eindeutiger Weise festgelegt.  $\mathfrak{P}$  sei die Menge aller Permutationen auf  $N$ .

Satz 1 [6, 12]: Die Mengen  $T_e^n := \bigcup_{\pi \in \mathfrak{B}} \{s : s \leq s[e, \pi]\}$ ,  $e \in E$ , sind Triangulationen von  $W^n$ .

Die Komplexe  $T_e^n$ ,  $e \in E$ , werden als *Kuhntriangulationen* von  $W^n$  bezeichnet. Einige einfache Eigenschaften der Kuhntriangulationen von  $W^n$  sind in den folgenden Lemmata zusammengestellt.

Lemma 1: (i) Die Kante  $\langle e, -e \rangle$  ist Seite eines jeden  $n$ -Simplexes aus  $T_e^n$ .

(ii) Ist  $a^*$  ein gemeinsamer Eckpunkt der Kuhnsimplexe

$$s[e, \pi_1] = \langle e, a^1, \dots, a^n \rangle \quad \text{und} \quad s[e, \pi_2] = \langle e, b^1, \dots, b^n \rangle$$

aus  $T_e^n$ , so folgt aus  $a^* = a^i = b^i$  stets  $i = j$ .

(iii) Die Kuhnsimplexe  $s[e, \pi_1]$  und  $s[e, \pi_2]$  aus  $T_e^n$  besitzen genau dann eine gemeinsame  $(n-1)$ -Seite, wenn

a) ein Index  $j^* \in N \setminus \{n\}$  existiert, so daß  $\pi_1(j^*) = \pi_2(j^* + 1)$  und  $\pi_1(j^* + 1) = \pi_2(j^*)$  ist, und wenn

b)  $\pi_1(i) = \pi_2(i)$  für alle  $i \in N_0 \setminus \{j^*, j^* + 1\}$  gilt.

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus der Konstruktionsvorschrift (1). Ebenfalls aus der Konstruktionsvorschrift erhält man für den  $i$ -ten Eckpunkt eines Kuhnsimplexes

$$a^i = e - 2 \sum_{j=1}^i e_{\pi(j)} u^{\pi(j)}. \quad (2)$$

Die Gleichung

$$a^i - b^i = 2 \left( \sum_{k=1}^j e_{\pi_1(k)} u^{\pi_1(k)} - \sum_{k=1}^i e_{\pi_2(k)} u^{\pi_2(k)} \right) = 0$$

ist nur dann erfüllt, wenn  $i = j$  ist. Damit ist auch (ii) bewiesen.

(iii): Sind die Bedingungen a) und b) erfüllt, so besitzen  $s[e, \pi_1]$  und  $s[e, \pi_2]$  aufgrund von (1)  $n$  gemeinsame Eckpunkte, die eine gemeinsame  $(n-1)$ -Seite aufspannen. Ist  $\bar{s}$  eine gemeinsame  $(n-1)$ -Seite von  $s[e, \pi_1] = \langle a^0, \dots, a^n \rangle$  und  $s[e, \pi_2] = \langle b^0, \dots, b^n \rangle$ ,  $e = a^0 = b^0$ , so gibt es wegen (ii) genau  $n$  Indizes  $0 = i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} < i_n = n$  mit  $a^{i_k} = b^{i_k}$ . Die Menge  $I = \{i \in N : \pi_1(i) \neq \pi_2(i)\}$  ist nicht leer, da andernfalls  $s[e, \pi_1]$  und  $s[e, \pi_2]$  identisch wären. Da  $\pi_1$  und  $\pi_2$  Permutationen auf  $N$  sind, muß  $I$  mindestens zwei Elemente enthalten, also  $m^* := \max I \neq \min I =: m_*$  sein. Aus (1) folgt  $a^{m_*} \neq b^{m_*}$ .

Wir wollen nun annehmen, daß eine natürliche Zahl  $\mu$  mit  $m_* < \mu < m^*$  existiert. Da  $\bar{s}$   $(n-1)$ -dimensional ist, ist  $m_*$  der einzige Index aus  $N_0$ , der die Bedingung

$$a^l \neq b^l, \quad l \in N_0, \quad (4)$$

erfüllt, also ist  $a^\mu = b^\mu$ . Für  $\nu = \min \{i \in I : i > \mu\}$  gilt aufgrund der Konstruktionsvorschrift (1)  $a^\nu \neq b^\nu$ , was ein Widerspruch zu der Tatsache ist, daß  $m_*$  der einzige Index ist, der (4) erfüllt. Damit ist die Annahme widerlegt, und es gilt  $m^* = m_* + 1$ . Unter Verwendung der Eineindeutigkeit der Abbildungen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  erhält man für  $j^* = m_*$  die Bedingungen a) und b) ■

Lemma 2: (i) Die Randsimplexe von  $T_e^n$  sind jene  $(n-1)$ -Simplexe aus  $T_e^n$ , die genau einen Punkt der Menge  $\langle e, -e \rangle$  als Eckpunkt besitzen.

(ii) Jedes  $n$ -Simplex aus  $T_e^n$  wird von genau zwei Randsimplexen berandet.

Satz 2 (Stengersche Formel): Sind die Triangulationen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{T}_e^n$  ( $e \in \mathbf{E}$ ) von  $P^n$  bzw.  $W^n$  kanonisch orientiert, so gilt für  $\Phi \in \mathbf{D}_L(P^n)$ ,  $\mathbf{L} = \text{Rd}(\mathbf{T}_e^n)$ ,

$$\text{deg}(\Phi, \text{int } P^n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1}} d(\sigma, \Phi),$$

falls  $\mathbf{T}$  eine  $\text{Rd}(\mathbf{T}_e^n)$ -zulässige Triangulation von  $\mathbf{b}(P^n)$  bez.  $\Phi$  ist.

Beweis: Die Grundsimplexe der Kuhntriangulation  $\mathbf{T}_e^n$  werden durch genau  $n!$  Permutationen definiert, wobei jede Permutation genau ein Grundsimplex definiert. Wegen Lemma 2 enthält  $\text{Rd}(\mathbf{T}_e^n)$  also genau  $2n!$   $(n - 1)$ -Simplexe.

Für ein Simplex  $\sigma = [a^1 \dots a^n] \in \mathbf{T}_{n-1}$  mit  $d(\sigma, \Phi) \neq 0$  erhält man unter Verwendung der Konstruktionsvorschrift (1)

$$|d(\sigma, \Phi)| = |\det(\text{sgn } \Phi(a^1) \dots \text{sgn } \Phi(a^n))| = 2^{n-1}.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \text{deg}(\Phi, \text{int } P^n) &= (2n!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1}} \text{sgn } d(\sigma, \Phi) \\ &= (2n!)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1}} \frac{d(\sigma, \Phi)}{|d(\sigma, \Phi)|} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1}} d(\sigma, \Phi) \blacksquare \end{aligned}$$

Für eine Kuhntriangulation  $\mathbf{T}_e^n$  erhält man auf natürliche Weise eine kanonische Orientierung. Ein  $n$ -Simplex  $s[e, \pi] = \langle a^0, \dots, a^n \rangle \in \mathbf{T}_e^n$  sei durch

$$\sigma = \varrho \chi(\pi) [a^0 \dots a^n], \quad \varrho = \prod_{i=1}^n e_i, \tag{5a}$$

orientiert, wobei  $\chi(\pi)$  der Charakter der Permutation  $\pi$  und die Numerierung der Eckpunkte die durch die Konstruktionsvorschrift (1) erzeugte ist. Ist  $\bar{s}$  eine reguläre  $(n - 1)$ -Seite von  $s[e, \pi]$ , so sei

$$\bar{\sigma} = \varrho(-1)^t [a^0 \dots \hat{a}^t \dots a^n]. \tag{5b}$$

Diese Definition ist wegen Lemma 1 (ii) von der Wahl des  $n$ -Simplexes, das von  $\bar{s}$  berandet wird, unabhängig. Ist  $\bar{s}$  ein Randsimplex von  $\mathbf{T}_e^n$  und berandet  $\bar{s}$  das Simplex  $s[e, \pi]$ , so sei  $\bar{\sigma}$  durch

$$\bar{\sigma} = \chi(\pi) \varrho(-1)^t [a^0 \dots \hat{a}^t \dots a^n] \tag{5c}$$

orientiert. Alle Simplexe aus  $\mathbf{T}_e^n$ , deren Dimension kleiner als  $n - 1$  ist, mögen in beliebiger Weise orientiert sein. Ist das orientierte  $(n - 1)$ -Simplex  $\tau$ ,  $|\tau| = \langle a^0, \dots, \hat{a}^i, \dots, a^n \rangle$ , eine gemeinsame Seite der  $n$ -Simplexe  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ ,  $|\sigma_i| = s[e, \pi_i]$  ( $i = 1, 2$ ), so gilt für die Berandungsfunktion  $\varepsilon$  von  $\mathbf{T}_e^n$

$$\varepsilon(\tau, \sigma_1) + \varepsilon(\tau, \sigma_2) = \varrho(\chi(\pi_1) + \chi(\pi_2)) = 0,$$

da sich die Permutationen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  aufgrund von Lemma 1 (iii) um eine ungerade Anzahl von Inversionen unterscheiden. Aus (5a) und (5c) erhält man für ein Randsimplex  $\tau$  von  $\mathbf{T}_e^n$  und das von ihm berandete  $n$ -Simplex  $\sigma$  sofort  $\varepsilon(\tau, \sigma) = 1$ . Folglich wird durch (5) eine inzident-kohärente Orientierung für  $\mathbf{T}_e^n$  definiert. Darüber hinaus gilt für ein  $n$ -Simplex  $\sigma = \chi(\pi) \varrho [a^0 \dots a^n]$ ,  $|\sigma| = s[e, \pi]$ ,

$$\text{sgn } \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a^0 & \dots & a^n \end{pmatrix} = \chi(\pi) \prod_{i=1}^n e_i.$$

Somit ist  $\sigma$  im  $\mathbf{R}^n$  positiv orientiert und damit  $\mathbf{T}_e^n$  durch (5) kanonisch orientiert.

2.2.  $(\pi, d)$ -Index-Formel

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden Vereinfachungen der Stengerschen Formel vorgenommen, indem die Größe  $d(\sigma, \Phi)$  durch andere, schneller zu berechnende Größen ersetzt wird.

**Definition:** Gegeben sei eine Permutation  $\pi: N \rightarrow N$  und ein Vektor  $d = (d_1, \dots, d_n)^T \in \mathbf{R}^n$  mit  $d_i \in \{-1, 1\}$  für  $i = 1(1)n$ . Eine  $(n, n)$ -Matrix  $(c_{ij})$  heißt  $(\pi, d)$ -Matrix, wenn für  $j = 1(1)n$  die Bedingungen

- (i)  $c_{ij} = d_i$ , falls  $\pi(i) \geq j$  ist, und  
 (ii)  $c_{ij} \in \{-d_i, 0\}$ , falls  $\pi(i) + 1 = j$  ist

erfüllt sind. Ein orientiertes  $(n-1)$ -Simplex  $\sigma = [a^1 \dots a^n]$  wird als  $(\pi, d)$ -Simplex bezeichnet, falls die Matrix  $(a^1 \dots a^n)$  eine  $(\pi, d)$ -Matrix ist.  $\sigma$  heißt  $(\pi, d)$ -wesentlich bez. der stetigen Funktion  $\Phi$ , wenn die Matrix

$$\mathfrak{S}(\sigma, \Phi) := (\operatorname{sgn} \Phi(a^1) \dots \operatorname{sgn} \Phi(a^n))$$

eine  $(\pi, d)$ -Matrix ist oder durch Spaltenvertauschungen zu einer solchen gemacht werden kann.

**Lemma 3:** Ist  $L$  eine Triangulation von  $\mathbf{b}(W^n)$ , und gilt für alle Eckpunkte  $e = (e_1, \dots, e_n)^T \in \mathbf{E}(L)$  stets  $e_i \in \{-1, 0, 1\}$  für  $i = 1(1)n$ , so gibt es zu jedem Paar  $(\pi, d)$  höchstens ein Grundsimpler in dem orientierten Komplex  $L$ , das ein  $(\pi, d)$ -Simplex ist.

**Beweis:** Angenommen, es gibt zwei  $(\pi, d)$ -Simplexe  $\sigma_1 = [a^1 \dots a^n]$  und  $\sigma_2 = [b^1 \dots b^n]$  in  $L$ . Es sei  $k = \min \{j \in N: a^j \neq b^j\}$ . Aus obiger Definition folgt sofort  $k \geq 2$ . Die Seiten  $\langle a^1, \dots, a^k \rangle$  und  $\langle a^1, \dots, a^{k-1}, b^k \rangle$  von  $|\sigma_1|$  bzw.  $|\sigma_2|$  sind isomorph zu den  $(k-1)$ -Simplexen  $\langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^k \rangle$  und  $\langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^{k-1}, \bar{b}^k \rangle$ , wobei für  $i = 1(1)k$   $\bar{a}^i = (a_{j_1}^i, \dots, a_{j_{k-1}}^i)^T$ ,  $j_l = \pi^{-1}(l)$ ,  $l = 1(1)k-1$ , ist. Analog sei  $\bar{b}^k$  definiert. Die Simplexe  $\langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^k \rangle$  und  $\langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^{k-1}, \bar{b}^k \rangle$  sind in dem Einheitswürfel  $W^{k-1} \subseteq \mathbf{R}^{k-1}$  enthalten. Die Trägerebene von  $\langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^{k-1} \rangle$  ist mit einer Seitenebene  $E$  von  $W^{k-1}$  identisch. Folglich liegen  $\bar{a}^k$  und  $\bar{b}^k$  im gleichen Halbraum bez.  $E$ , und es gilt

$$\operatorname{int} \langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^k \rangle \cap \operatorname{int} \langle \bar{a}^1, \dots, \bar{a}^{k-1}, \bar{b}^k \rangle \neq \emptyset$$

(s. [3: S. 38]). Aufgrund der Isomorphie ist auch  $\operatorname{int} |\sigma_1| \cap \operatorname{int} |\sigma_2| \neq \emptyset$ , was ein Widerspruch zu der Tatsache ist, daß  $L$  ein Komplex ist ■

**Definition:** Ist  $\sigma$  ein orientiertes  $(n-1)$ -Simplex des  $\mathbf{R}^n$  und  $\nu$  die Anzahl der Spaltenvertauschungen, die erforderlich sind, um  $\mathfrak{S}(\sigma, \Phi)$  auf die Gestalt einer  $(\pi, d)$ -Matrix zu bringen, so bezeichnet man die Größe

$$\operatorname{ind}_{\pi, d}(\sigma, \Phi) := \begin{cases} (-1)^\nu, & \text{falls } \sigma \text{ } (\pi, d)\text{-wesentlich bez. } \Phi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als  $(\pi, d)$ -Index von  $\sigma$  bez. der Funktion  $\Phi$ .

Ist  $\sigma = [a^1 \dots a^n]$  und  $\tau = [\operatorname{sgn} \Phi(a^1) \dots \operatorname{sgn} \Phi(a^n)]$ , so gibt der  $(\pi, d)$ -Index von  $\sigma$  bez.  $\Phi$  an, ob  $\tau$  mit dem durch  $\pi$  und  $d$  bestimmten orientierten Simplex  $\delta$  gleichorientiert ist im  $\mathbf{R}^n$  oder nicht, also ob

$$\tau = \operatorname{ind}_{\pi, d}(\sigma, \Phi) \delta$$

ist. Diese Definition ermöglicht eine weitere Formel zur Berechnung des Abbildungsgrades. Im Teil I wurde gezeigt, daß der Abbildungsgrad eines  $n$ -dimensionalen

Polyeders  $P^n$  bez. einer stetigen Funktion  $\Phi$  mit Hilfe der orientierten Überdeckungen einer orientierten Triangulation  $L$  des  $n$ -dimensionalen Einheitswürfels durch die Simplexe der Kette  $F(c)$  berechnet werden kann, wobei  $c$  die Kette aller in geeigneter Weise orientierten  $(n - 1)$ -Simplexe von  $T$  und  $F$  die durch  $f$  induzierte Kettenabbildung von  $C_{n-1}(T)$  in  $C_{n-1}(L)$  ist. Dabei ist die Differenz der positiven und negativen Überdeckungen durch  $F(c)$  für alle  $(n - 1)$ -Simplexe von  $L$  gleich. Folglich kann der Abbildungsgrad mit Hilfe eines ausgewählten Testsimplexes aus  $L$  berechnet werden. Diese Idee liegt dem folgenden Satz zugrunde.

Satz 3: Die Triangulation  $M$  von  $P^n$  sei kanonisch orientiert. Ist die Menge  $\mathfrak{B}_{\pi,d}(\Phi)$  der für die Funktion  $\Phi \in D_L(P^n)$  ( $\pi, d$ )-wesentlichen Simplexe aus der Triangulation  $T$  von  $b(P^n)$  nicht leer, so gilt

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = \delta \chi(\pi) \sum_{\sigma \in \mathfrak{B}_{\pi,d}(\Phi)} \text{ind}_{\pi,d}(\sigma, \Phi),$$

$$\delta = \prod_{i=1}^n d_i, \text{ falls } T = \text{Rd}(M) \text{ eine } L\text{-zulässige Triangulation für } \Phi \text{ ist.}$$

Beweis: Für das  $(\pi, d)$ -Simplex  $\delta = [a^1 \dots a^n]$  gilt

$$\text{sgn det}(a^1 \dots a^n)$$

$$= \chi(\pi) \text{sgn det} \begin{pmatrix} d_{j_1} & -d'_{j_1} & & & \\ d_{j_2} & d_{j_2} & -d'_{j_2} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ d_{j_{n-1}} & d_{j_{n-1}} & & & -d'_{j_{n-1}} \\ d_{j_n} & d_{j_n} & & & d_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \chi(\pi) \text{sgn det} \begin{pmatrix} d_{j_1} & -(d_{j_1} + d'_{j_1}) & & & \\ d_{j_2} & & -(d_{j_2} + d'_{j_2}) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \\ d_{j_{n-1}} & & & & -(d_{j_{n-1}} + d'_{j_{n-1}}) \\ d_{j_n} & & & & \end{pmatrix}$$

$$= \chi(\pi) \text{sgn} \left( (-1)^{n+1} d_{j_n} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (d_{j_i} + d'_{j_i}) \right) = \chi(\pi) \delta; j_k = \pi^{-1}(k),$$

$$k = 1(1)n, \text{ und } d_k' \in \{d_k, 0\}, k = 1(1)n - 1.$$

Aus der Voraussetzung  $\mathfrak{B}_{\pi,d}(\Phi) \neq \emptyset$  und Lemma 3 folgt die Existenz genau eines  $(\pi, d)$ -Simplexes  $\delta_*$  in  $L$  (die Triangulation von  $W^n$ , deren Randkomplex die Triangulation  $L$  ist, sei wieder kanonisch orientiert). Offensichtlich gilt  $\delta_* = \chi(\pi) \delta \delta$ . In Teil I [5: Korollar 2] wurde

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = \mu_*^+ - \mu_*^-, \quad \mu_*^\pm = \text{card} \{ \sigma \in T_{n-1} : F(\sigma) = \pm \delta_* \} \quad (6)$$

gezeigt. Unter Verwendung der Beziehung

$$\begin{aligned} \{ \sigma \in T_{n-1} : F(\sigma) = \omega \delta_* \} &= \{ \sigma \in T_{n-1} : F(\sigma) = \omega \chi(\pi) \delta \delta \} \\ &= \{ \sigma \in T_{n-1} : \text{ind}_{\pi,d}(\sigma, \Phi) = \omega \chi(\pi) \delta \}, \quad \omega \in \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

erhält man nun aus (6) die gewünschte Formel ■

Bemerkungen: 1. Wählt man für  $\pi$  die identische Permutation und setzt  $d = (1, \dots, 1)^T$ , so ergibt sich die von B. KEARFOTT [4] angegebene Formel.

2. Der von M. STYNES [10] angegebene Algorithmus entspricht im wesentlichen der im Satz angegebenen Formel.

3. Zu einem vorgegebenen Paar  $(\pi, d)$  muß in der orientierten Pseudomannigfaltigkeit  $L$  nicht notwendig ein  $(\pi, d)$ -Simplex existieren.

Der in der Abb. 1 dargestellte Teilkomplex von  $L$  möge eine Seite von  $W^3$  triangulieren. Für die identische Permutation  $\text{id}$  und  $d = (-1, 1, 1)^T$  ist in dem betrachteten Teilkomplex und damit auch in  $L$  kein  $(\text{id}, d)$ -Simplex enthalten. Das zu  $\sigma_1$  entgegengesetzt orientierte Simplex ist ein  $(\text{id}, d)$ -Simplex. Andererseits kann ein orientiertes Simplex für verschiedene Paare  $(\pi, d)$  ein  $(\pi, d)$ -Simplex sein. Beispielsweise ist  $\sigma_1$  (vgl. Abb. 1) für die beiden im folgenden aufgeführten Fälle ein  $(\pi, d)$ -Simplex:

$\pi$	$d$
$\text{id}$	$(1, 1, 1)^T$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(-1, 1, 1)^T$

Durch die Voraussetzung  $\mathfrak{R}_{\pi, d}(\Phi) \neq \emptyset$  in obigem Satz wird gesichert, daß die Wahl des Paares  $(\pi, d)$  mit der orientierten Triangulation  $L$  verträglich ist.

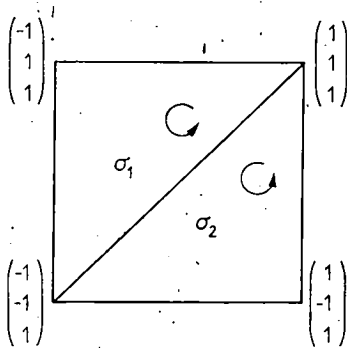


Abb. 1

### 2.3. $l_\Phi$ -Formeln

Für diesen Abschnitt wird vorausgesetzt, daß die Triangulation  $M$  von  $P^n$  eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Eine in rechen technischer Hinsicht sehr günstige Formel zur Berechnung des Abbildungsgrades erhält man durch Einführung einer speziellen Bewertung auf  $M$ . Eine Bewertung  $l$  auf der Pseudomannigfaltigkeit  $M$  induziert in jedes Simplex  $s = \langle a^0, \dots, a^k \rangle$  aus  $M$  durch

$$\sigma = [a^{i_1} \dots a^{i_k}], \quad l(a^{i_j}) = j, \quad j = 1(1)k,$$

eine Orientierung. Ist  $M$  orientiert, so ist die Anzahl der  $cl$ -Simplexe aus  $M$  und die Anzahl der  $j - cl$ -Simplexe aus dem orientierten Randkomplex  $\text{Rd}(M)$ , deren Orientierung mit der durch die Bewertung  $l$  induzierten Orientierung übereinstimmt bzw.

zu dieser entgegengesetzt ist, von besonderem Interesse. Es sei

$$\mathfrak{M}^\pm(l) := \{\tau \in \mathbf{M} : \tau = \pm[a^0 \dots a^n], l(a^i) = i \text{ für } i = 0(1)n\},$$

$$\mathfrak{R}_j(l) := \{\sigma \in \text{Rd}(\mathbf{M}) : \sigma \text{ } j\text{-fast vollständig bewertet}\},$$

$$\mathfrak{R}_j^\pm(l) := \{\sigma \in \mathfrak{R}_j(l) : \sigma = \pm[a^1 \dots a^n], l(a^1) < \dots < l(a^n)\},$$

$$\alpha^\pm = \text{card } \mathfrak{M}(l) \quad \text{und} \quad \beta_j^\pm = \text{card } \mathfrak{R}_j^\pm(l).$$

**Satz 4 [2]:** Ist  $l: \mathbf{E}(\mathbf{M}) \rightarrow N_0$  eine Bewertung auf der inzident-kohärent orientierten Pseudomannigfaltigkeit  $\mathbf{M}$ , so gilt für  $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$  und  $\beta_j = \beta_j^+ - \beta_j^-$  die Darstellung  $\alpha = (-1)^j \beta_j$ ,  $j \in N_0$ .

Die bereits angekündigte Formel zur Berechnung des Abbildungsgrades erhält man durch Einführung einer durch die stetige Funktion  $\Phi: P^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $|\mathbf{M}| = P^n$ , vermittelten Bewertung  $l_\Phi$  auf  $\mathbf{M}$ ,

$$l_\Phi(e) = i \Leftrightarrow \Phi(e) \in B_i, \quad e \in \mathbf{E}(\mathbf{M}),$$

wobei die Teilmengen  $B_i$  des  $\mathbf{R}^n$  folgendermaßen definiert sind:

$$B_0 := \{y \in \mathbf{R}^n : y > 0\},$$

$$B_i := \{y \in \mathbf{R}^n : y_j > 0, j = i + 1(1)n; y_i \leq 0\}, \quad i = 1(1)n - 1$$

$$B_n := \{y \in \mathbf{R}^n : y_n \leq 0\}$$

(in der Abb. 2 sind diese Mengen für den  $\mathbf{R}^2$  dargestellt).

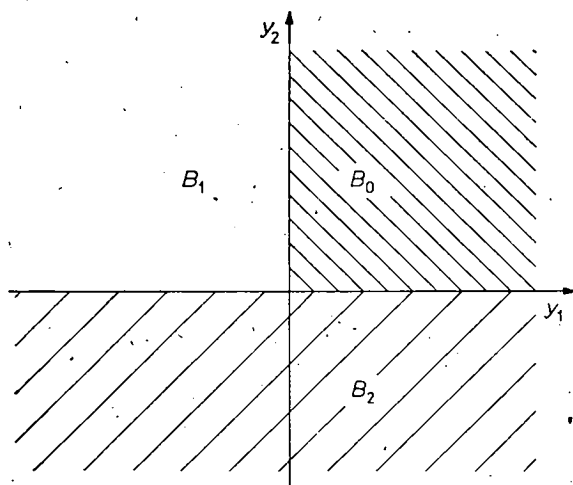


Abb. 2

**Definition:** Ist  $l_\Phi$  eine durch die stetige Funktion  $\Phi$  definierte Bewertung auf der orientierten Pseudomannigfaltigkeit  $\mathbf{M}$ , so sei für  $\sigma \in \text{Rd}(\mathbf{M})$

$$b_j(\sigma; l_\Phi) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma \in \mathfrak{R}_j^+(l_\Phi) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } \sigma \in \mathfrak{R}_j^-(l_\Phi) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (j = 0(1)n).$$



Satz 5: Die Triangulation  $\mathbf{M}$  von  $P^n$  sei kanonisch orientiert. Ist die Menge  $\mathfrak{R}_j(l_\Phi)$  von  $\text{Rd}(\mathbf{M})$  nicht leer, so gilt für  $\Phi \in \mathbf{D}_L(P^n)$

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = (-1)^{n-j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{R}_j(l_\Phi)} \delta_j(\sigma; l_\Phi), \quad j \in N_0, \quad (7)$$

falls  $\text{Rd}(\mathbf{M})$  eine L-zulässige Triangulation von  $\mathfrak{b}(P^n)$  für  $\Phi$  ist.

Beweis: (i) Ein  $(n-1)$ -Simplex  $\sigma \in \text{Rd}(\mathbf{M})$  ist genau dann in  $\mathfrak{R}_j(l_\Phi)$ ,  $j \in N$ , enthalten, wenn  $\sigma$  bez. der Funktion  $\Phi(\pi, d)$ -wesentlich ist mit  $d = (1, \dots, 1)^T$  und

$$\pi(i) = \begin{cases} i, & \text{falls } i \leq j \text{ ist} \\ n, & \text{falls } i = n \text{ ist} \quad (i = 1(1)n). \\ i-1, & \text{falls } i > j \text{ ist} \end{cases}$$

(ii) Ein  $(n-1)$ -Simplex  $\sigma \in \text{Rd}(\mathbf{M})$  ist genau dann in  $\mathfrak{R}_0(l_\Phi)$  enthalten, wenn  $\sigma$  bez.  $\Phi(\pi, d)$ -wesentlich ist mit  $d = (-1, 1, \dots, 1)^T$  und

$$\pi(i) = \begin{cases} n, & \text{falls } i = 1 \text{ ist} \\ i-1, & \text{falls } i > 1 \text{ ist} \quad (i = 1(1)n). \end{cases}$$

Die Aussagen (i) und (ii) folgen direkt aus den entsprechenden Definitionen. Ebenfalls aus den Definitionen ergibt sich  $\text{ind}_{\pi, d}(\sigma, \Phi) = \delta_j(\sigma, l_\Phi)$ , wobei die Zuordnungen  $(\pi, d) \rightarrow j$  entsprechend (i) und (ii) vorzunehmen sind. Aus Satz 3 erhält man sofort die Formel (7) ■

Satz 6: Ist die Triangulation  $\mathbf{M}$  von  $P^n$  kanonisch orientiert und ist  $\mathfrak{R}_j(l_\Phi)$  nicht leer, so gilt für  $\Phi \in \mathbf{D}_L(P^n)$

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = (-1)^n \alpha, \quad (8)$$

falls  $\text{Rd}(\mathbf{M})$  eine L-zulässige Triangulation von  $\mathfrak{b}(P^n)$  für  $\Phi$  ist.

Beweis: Ausgehend vom vorigen Satz erhält man unter Verwendung von Satz 4

$$\deg(\Phi, \text{int } P^n) = (-1)^{n-j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{R}_j(l_\Phi)} \delta_j(\sigma, l_\Phi) = (-1)^{n-j} \beta_j = (-1)^{n-j} (-1)^j \alpha = (-1)^n \alpha \quad \blacksquare$$

Bemerkungen: 1. Die Voraussetzung  $\mathfrak{R}_j(l_\Phi) \neq \emptyset$  kann aufgrund des Satzes 4 durch  $\mathfrak{M}(l_\Phi) \neq \emptyset$  ersetzt werden, wobei  $\mathfrak{M}(l_\Phi) = \mathfrak{M}^+(l_\Phi) \cup \mathfrak{M}^-(l_\Phi)$  ist.

2. Die Formel (8) entspricht der von M. PRÜFER [7] angegebenen Berechnungsformel.

### 3. Formeln vom $O^n$ -Typ

Analog zu den Formeln vom  $W^n$ -Typ bezeichnen wir Formeln zur Berechnung des Abbildungsgrades, die auf der Oktaederdarstellung beruhen, als *Formeln vom  $O^n$ -Typ*.

Definition: Ist  $\mathbf{T}$  eine  $\alpha_1$ -Triangulation von  $\mathfrak{b}(W^n)$  bez. der Funktion  $\Phi$ , so bezeichnet man die Abbildung

$$l_\Phi^*(e) = \eta(e) \text{sgn } \varphi_{\eta(e)}(e), \quad e \in \mathbf{E}(\mathbf{T}),$$

$$\eta(e) = \min \{i \in N : \text{sgn } \varphi_i(x) = \text{const} \neq 0 \text{ für alle } x \in |\text{St}(e)|\},$$

als die durch  $\Phi$  induzierte  $*$ -Bewertung auf  $\mathbf{T}$ .

Ist  $\mathbf{I} := \{\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) : |v_i| = 1, i = 1(1)n\}$ , und ist  $\mathbf{T}$  kohärent orientiert, so sei

$$\mathfrak{M}_*^{\pm}(\bar{v}) := \{\sigma \in \mathbf{T} : \sigma = \pm[a^1 \dots a^n] \text{ und } l_{\phi}^*(a^i) = v_i i, i = 1(1)n\};$$

$$p(\bar{v}) = \prod_{i=1}^n v_i, \quad \bar{v} \in \mathbf{I};$$

$$\alpha^{\pm}(\bar{v}) = \text{card } \mathfrak{M}_*^{\pm}(\bar{v}) \quad \text{und} \quad \alpha(\bar{v}) = \alpha^+(\bar{v}) - \alpha^-(\bar{v}).$$

Satz 7: Sind die Triangulationen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}^0$  von  $P^n$  bzw.  $O^n$  kanonisch orientiert, so gilt für  $\Phi \in D_1(P^n)$

$$\text{deg}(\Phi, \text{int } P^n) = 2^{-n} \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}} p(\bar{v}) \alpha(\bar{v}).$$

Beweis: Man sieht leicht, daß für ein  $(n-1)$ -Simplex  $\sigma = [a^1 \dots a^n]$  aus  $\mathbf{T}$  die Aussagen

$$(i) \quad d^*(\sigma, \Phi) \neq 0,$$

$$(ii) \quad \{|l_{\phi}^*(a^1)|, \dots, |l_{\phi}^*(a^n)|\} = N$$

äquivalent sind (zur Definition von  $d^*(\sigma, \Phi)$  siehe Teil I [5: S. 354]). Die Abbildung

$$\bar{v} \rightarrow p(\bar{v}) [e^1 \dots e^n], \quad e^i = (0, \dots, v_i, 0, \dots, 0)^T, \quad (9)$$

ist eine eindeutige Abbildung von  $\mathbf{I}$  in den orientierten Randkomplex  $\text{Rd}(\mathbf{K}^0)$ .

Ist

$$\mathfrak{N}^{\pm} := \{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1} : d^*(\sigma, \Phi) = \pm 1\} \quad \text{und} \quad \mathbf{I}^{\pm} := \{\bar{v} \in \mathbf{I} : p(\bar{v}) = \pm 1\},$$

so erhält man unter Verwendung der Beziehung

$$d^*(\sigma, \Phi) = \omega p(\bar{v}), \quad \sigma = \omega[a^1 \dots a^n] \quad \text{und} \quad l_{\phi}^*(a^i) = v_i i, \quad i = 1(1)n,$$

die Gleichung

$$\mathfrak{N}^{\pm} = \bigcup_{\bar{v} \in \mathbf{I}^+} \mathfrak{M}_*^+(\bar{v}) \cup \bigcup_{\bar{v} \in \mathbf{I}^-} \mathfrak{M}_*^-(\bar{v}).$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathbf{T}_{n-1}} d^*(\sigma, \Phi) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{N}^+} d^*(\sigma, \Phi) - \sum_{\sigma \in \mathfrak{N}^-} d^*(\sigma, \Phi) \\ &= \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}^+} \alpha^+(\bar{v}) + \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}^-} \alpha^-(\bar{v}) - \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}^-} \alpha^+(\bar{v}) - \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}^+} \alpha^-(\bar{v}) \\ &= \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}^+} \alpha(\bar{v}) - \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}^-} \alpha(\bar{v}) = \sum_{\bar{v} \in \mathbf{I}} p(\bar{v}) \alpha(\bar{v}). \end{aligned}$$

Aus dem Theorem 3 von Teil I [5] folgt nun sofort die Behauptung des Satzes ■

Folgerung: Unter den Voraussetzungen des Satzes 7 gilt für  $\Phi \in D_1(P^n)$

$$\text{deg}(\Phi, \text{int } P^n) = p(\bar{v}) \alpha(\bar{v}), \quad \bar{v} \in \mathbf{I}.$$

Beweis: Sind  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sämtliche Grundsimplexe von  $\mathbf{T} = \text{Rd}(\mathbf{M})$  und  $\delta_1, \dots, \delta_k$  ( $k = 2^n$ ) sämtliche Grundsimplexe von  $\text{Rd}(\mathbf{K}^0)$ , so gilt für die durch die simpliziale Abbildung  $g$  (s. Teil I [5: S. 353]) bestimmte Kettenabbildung  $F$  von  $C_{n-1}(\mathbf{T})$  in  $C_{n-1}(\text{Rd}(\mathbf{K}^0))$

$$\sum_{i=1}^m F(\sigma_i) = \sum_{i=1}^k \gamma \delta_i, \quad \gamma \in \Gamma \quad (10)$$

(vgl. [8]). Die Größe  $\alpha(\bar{v})$  gibt die Differenz der positiven und negativen Überdeckungen des durch das  $n$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  bestimmten orientierten Grundsimplexes  $\delta$  von  $\text{Rd}(\mathbf{K}^0)$  (vgl. (9)) an. Aus (10) folgt  $\gamma = p(\bar{v}) \alpha(\bar{v})$ ,  $\bar{v} \in \mathbf{I}$ . Mit Hilfe dieses Resultats erhält man aus obigem Satz die gewünschte Aussage ■

#### 4. Eine Methode zur Existenzsicherung von Nullstellen nichtlinearer Gleichungssysteme

Bei der iterativen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

$$\Phi(x) = 0 \quad (11)$$

erhält man aus den gebräuchlichen Abbruchkriterien im allgemeinen keine Informationen über die Güte der erreichten Näherungslösung. Eine Möglichkeit für eine Fehlerabschätzung einer Näherungslösung  $\bar{x}$  von (11) bei gleichzeitigem Nachweis der Existenz einer Lösung in einem Gebiet von vorgegebenem Durchmesser, das  $\bar{x}$  enthält, bietet der Abbildungsgrad. Aus der Relation  $\text{deg}(\Phi, \Omega) \neq 0$  folgt die Existenz einer Lösung von (11) in  $\Omega$ , wobei  $\Omega$  ein nichtleeres und beschränktes Gebiet des  $\mathbf{R}^n$  ist, auf dessen Rand die Funktion  $\Phi$  keine Nullstellen besitzt. Der Durchmesser von  $\Omega$  liefert eine obere Schranke für den Abstand der Näherungslösung  $x$  von der exakten Lösung  $x^*$  von (11).

Mit  $e^i$  wird wieder der  $i$ -te Einheitsvektor des  $\mathbf{R}^n$  bezeichnet.

**Satz 8:** *Der Punkt  $\bar{x}$  sei eine Approximation für eine Nullstelle der stetigen Funktion  $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  und  $d$  eine von Null verschiedene reelle Zahl. Besteht für das durch die Punkte  $x^0, x^i = x^{i-1} + d e^i$ ,  $i = 1(1)n$ , mit  $x_i^0 = \bar{x}_i - \frac{d(n-i+1)}{n+1}$  aufgespannte Simplex  $s[x^0, d]$  die Beziehung  $\text{deg}(\Phi, \text{int } s[x^0, d]) \neq 0$ , so ist im Inneren von  $s[x^0, d]$  mindestens eine Nullstelle von  $\Phi$  enthalten, und es gilt für jede Nullstelle  $x^* \in \text{int } s[x^0, d]$  von  $\Phi$*

$$\|\bar{x} - x^*\| \leq |d| \sqrt{\frac{(2n+1)n}{6(n+1)}} \quad (12)$$

**Beweis:** Aus der Bedingung  $\text{deg}(\Phi, \text{int } s[x^0, d]) \neq 0$  folgt aufgrund der Axiome des Abbildungsgrades die Existenz mindestens einer Nullstelle von  $\Phi$  in  $\text{int } s[x^0, d]$ . Der Abstand von  $\bar{x}$  zu einem Eckpunkt  $x^k$  von  $s[x^0, d]$  läßt sich durch

$$\|\bar{x} - x^k\| \leq |d| \sqrt{\frac{(2n+1)n}{6(n+1)}}$$

abschätzen. Für eine Nullstelle  $x^*$  von  $\Phi$  gilt (baryzentrische Koordinaten; vgl. [8]):

$$x^* = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 0(1)n.$$

Somit erhält man  $\|\bar{x} - x^*\| \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i \|\bar{x} - x^i\| \leq |d| \sqrt{\frac{(2n+1)n}{6(n+1)}} \quad \blacksquare$

Für zwei beliebige Eckpunkte  $x^i$  und  $x^j$  von  $s[x^0, d]$  gilt  $\|x^i - x^j\|^2 \leq d^2 |i - j|$ , woraus für den Durchmesser von  $s[x^0, d]$  sofort  $\text{diam}(s[x^0, d]) = |d| \sqrt{n}$  folgt.

**Bemerkung:** Eine weitere Anwendung des Abbildungsgrades bei der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme ist in [6] beschrieben. Dort wird gezeigt, wie man mit Hilfe des Abbildungsgrades, ausgehend von einem beliebigen Startvektor, eine Nullstelle einer stetigen Funktion lokalisieren kann.

## 5. Testergebnisse

Auf der Grundlage des Satzes 8 wurde ein PL/1-Programm erstellt. Die Berechnung des Abbildungsgrades erfolgt dabei mit Hilfe der Stengerschen Formel (s. Satz 2). Zu einer vorgegebenen Genauigkeit  $\varepsilon := \|\bar{x} - x^*\|$  wird nach (12) die Größe  $d$  berechnet, mit deren Hilfe das Simplex  $s[x^0, d]$  bestimmt wird. Die Berechnung des Abbildungsgrades wird für mehrere Verfeinerungen der Triangulation  $T$  des Randes von  $s[x^0, d]$  wiederholt. Eine Triangulation  $T$  mit dem Zerlegungsindex  $\varrho$  enthält dabei  $2^\varrho$  Grundsimplexe. Die Anzahl der Ecken von  $T$  beträgt  $(2^\varrho + 1)(n + 1)$ , wobei  $n$  die Dimension des betrachteten Simplexes bezeichnet, und ist mit der Anzahl der erforderlichen Funktionswertberechnungen identisch. Bei einer Verfeinerung von  $T$  müssen nur für die neu hinzukommenden Ecken die Funktionswerte berechnet werden.

Anhand einiger der Literatur entnommener Funktionen wurde die im Abschnitt 4 beschriebene Methode und damit die Stengersche Formel getestet. Die meisten Beispiele wurden [1] entnommen. Bei der Auswertung der Tests werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$x^*$  — Nullstelle der stetigen Funktion  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ,

$\bar{x}$  — Näherung für eine Nullstelle von  $\Phi$ ,

$D$  — Durchmesser von  $s[x^0, d]$ ,

$\varrho$  — Zerlegungsindex der zur Berechnung verwendeten Triangulation des Randes von  $s[x^0, d]$ ,

deg — berechneter Abbildungsgrad von  $\Phi$  bez. int  $s[x^0, d]$ .

Alle Testrechnungen wurden auf einer Rechenanlage vom Typ ESER 1040 des Rechenzentrums der Karl-Marx-Universität Leipzig in einfacher Genauigkeit ausgeführt.

## Beispiel 1 (Brown-Funktion):

$$\varphi_1(x) = 0.5 \left( \sin x_1 x_2 - \frac{x_2}{2\pi} - x_1 \right), \quad \varphi_2(x) = e \left( \left( 1 - \frac{1}{4\pi} \right) (\exp(2x_1 - 1) - 1) + \frac{x_2}{\pi} - 2x_1 \right).$$

Test 1:  $\bar{x} = (0.500000, 3.14159)^T$ ,  $\varepsilon = 0.004$ ,  $D = 0.007589$ .

$\varrho$	2	4	6	8	10
deg	-0.50000	-1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000

$x^* = (0.5, \pi)^T$  ist eine Lösung.

Test 2:  $\bar{x} = (1.60457, -13.3629)^T$  (s. [1]),  $\varepsilon = 0.004$ ,  $D = 0.007589$ .

$\varrho$	2	4	6	8	10
deg	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

**Beispiel 2:**

$$\varphi_1(x) = x_1^2 - 4x_2, \quad \varphi_2(x) = x_2^2 - 2x_1 + 4x_2.$$

Test 1:  $\bar{x} = x^* = (0, 0)^T$ ,  $D = 0.0075$ .

$e$	3	6	9	10
deg	-1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000

Test 2:  $\bar{x} = (1.69542, 0.718611)^T$ ,  $\varepsilon = 0.0004$ ,  $D = 0.000759$ .

$e$	3	6	9	10
deg	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

**Beispiel 3:**

$$\varphi_1(x) = 2(x_1 + 10x_2) + 40(x_1 - x_4)^3, \quad \varphi_2(x) = 20(x_1 + 10x_2) + 4(x_2 - 2x_3)^3,$$

$$\varphi_3(x) = 10(x_3 - x_4) - 8(x_2 - 2x_3)^3, \quad \varphi_4(x) = -10(x_3 - x_4) - 40(x_1 - x_4)^3.$$

Test 1:  $\bar{x} = x^* = (0, 0, 0, 0)^T$ ,  $D = 0.02$ .

$e$	4	6	8
deg	0.00000	0.00000	0.00000

Die Jacobimatrix  $\Phi'(x^*)$  ist singulär.

**Beispiel 4 (Gheri-Mancino-Funktion):**

$$\varphi_i(x) = \beta n x_i + \left(i - \frac{n}{2}\right)^\gamma + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{z_{ij} (\sin^\alpha(\ln z_{ij}) + \cos^\alpha(\ln z_{ij}))\},$$

$$z_{ij} = \sqrt{x_j^2 + \frac{i}{j}} \quad (i, j = 1(1)n).$$

Es wurde gewählt:  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 14$ ,  $\gamma = 5$ .

Test 1:  $n = 2$ ,  $\bar{x} = (-0.0187587, -0.0731151)^T$ .

$e$	3	6	9	$\varepsilon$	$D$
deg	1.00000	1.00000	1.00000	0.04	0.075895
	1.00000	1.00000	1.00000	0.0004	0.000759

Test 2:  $n = 3$ ,  $\bar{x} = (-0.0157802, -0.0458576, -0.126871)^T$ .

$e$	3	6	9	$\varepsilon$	$D$
deg	0.83333	1.00000	1.00000	0.15	0.277746
	0.83333	1.00000	1.00000	0.0003	0.000555

Test 3:  $n = 5$ ,  $\bar{x} = (0.033941, -0.038253, -0.052271, -0.102821, -0.279192)^T$ .

$q$	6	8	9	$\varepsilon$	$D$
deg	0.462500	0.675000	0.837500	0.1	0.165144
	0.458333	0.704167	0.837500	$10^{-4}$	0.000165
	0.445833	0.741667	0.887500	$10^{-5}$	0.000016
	0.000000	-0.004167	0.008333	$10^{-6}$	0.000002

Für die ersten drei Fälle kann man die Existenz einer Nullstelle  $x^*$  von  $\Phi$  in den entsprechenden Gebieten als gesichert annehmen. Durch die weitere Verkleinerung des Gebietes (Fall 4) wird eine ungerade Anzahl von Nullstellen zu äußeren Punkten. Für eine Nullstelle von  $\Phi$  aus dem betrachteten Gebiet gilt somit die Abschätzung  $10^{-6} < \|\bar{x} - x^*\| < 10^{-5}$ .

## LITERATUR

- [1] BUS, J. C. P.: A comparative study of programs for solving nonlinear equations. Mathematical Centre Amsterdam, Department of Numerical Mathematics, Preprint NW 25-76 (1976).
- [2] FAN, K.: Simplicial Maps from an Orientable  $n$ -Pseudomanifold into  $S^m$  with the Octahedral Triangulation. J. Comb. Theory 2 (1967), 588—602.
- [3] HARZHEIM, E.: Einführung in die kombinatorische Topologie. Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1978.
- [4] KEARFOTT, B.: An Efficient Degree-Computation Method for Generalized Method of Bisection. Numer. Math. 32 (1979), 109—127.
- [5] KLIESCH, W.: Zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades im  $\mathbf{R}^n$ , Z. Anal. Anw. 3 (1984) 4, 337—355.
- [6] KLIESCH, W.: Zur numerischen Bestimmung des Abbildungsgrades im  $\mathbf{R}^n$  und seiner Anwendung bei der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme. Dissertation: Karl-Marx-Universität Leipzig 1983.
- [7] PRÜFER, M.: Sperner Simplices and the Topological Fixed Point Index. Sonderforschungsbereich 72 der Universität Bonn, Preprint 134 (1977).
- [8] RINOW, W.: Lehrbuch der Topologie. Dt. Verlag Wiss.: Berlin 1975.
- [9] STENGER, F.: Computing the Topological Degree of a Mapping in  $\mathbf{R}^n$ . Numer. Math. 25 (1975), 23—38.
- [10] STYNES, M.: A Simplification of Stenger's Topological Degree Formula. Numer. Math. 33 (1979), 147—156.
- [11] STYNES, M.: An Algorithm for Numerical Calculation of Topological Degree. Applicable Analysis 9 (1979), 63—77.
- [12] TODD, M. J.: The Computation of Fixed Points and Applications. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1976.
- [13] ZEIDLER, E.: Existenz, Eindeutigkeit, Eigenschaften und Anwendungen des Abbildungsgrades im  $\mathbf{R}^n$ . In: Theory of Nonlinear Operators. Akademie-Verlag: Berlin 1974, S. 259 bis 312.

Manuskripteingang: 25. 04. 83; in gestraffter Fassung: 26. 10. 1983

## VERFASSER:

Dr. WOLFGANG KLIESCH  
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität  
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10/11