Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (2) 1983, S. 145 – 157

Zur Konvergenz von Iterationsverfahren mit affinen Operatoren

D. Schott

Eine Reihe bekannter numerischer Verfahren zur iterativen Lösung linearer Gleichungen in Banachräumen kann man in der Form

$$x_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_0 x_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit affinen Operatoren $\mathbf{A}_n$ darstellen. Besitzen die Operatoren $\mathbf{A}_n$ gemeinsame Fixpunkte, so existieren oft affine Projektoren $\mathbf{P}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_n \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{A}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

In der vorliegenden Arbeit werden Konvergenzsätze für Iterationsverfahren mit solchen Operatorfolgen bewiesen.

Многие известные вычислительные методы для итерационного решения линейных уравнений в Банаховом пространстве могут быть представлены в виде

$$x_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_0 x_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

с аффинными операторами $\mathbf{A}_n$. Если операторы $\mathbf{A}_n$ имеют общие неподвижные точки, то часто существуют аффинные проекторы $\mathbf{P}$ со свойством

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_n \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{A}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В данной статье доказываются теоремы о сходимости итерационных методов с такими операторными последовательностями.

Many well-known numerical procedures for the iterative solution of linear equations in Banach spaces have the form

$$x_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_0 x_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

with affine operators $\mathbf{A}_n$. If the operators $\mathbf{A}_n$ possess common fixed points, then there often exist affine projectors $\mathbf{P}$ with the property

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_n \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{A}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

In this paper some convergence theorems are proved for iteration methods having such operator sequences.

0. Einführung

Zunächst werden einige Ergebnisse über affine Teilräume und affine Operatoren ohne Beweis zusammengestellt. Dann betrachten wir Mengen affiner Operatoren $\mathbf{A}$, für die ein gemeinsamer affiner Projektor $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{AP} = \mathbf{PA}$ existiert. Insbesondere untersuchen wir derartige Operatormengen, die aus affinen Projektoren mit gewissen Orthogonalitätseigenschaften bestehen. Anschließend werden die erzielten

Resultate benutzt, um Konvergenzaussagen für Iterationsverfahren der Gestalt

$$x_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_0 x_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit affinen Operatoren $\mathbf{A}_n$ herzuleiten. Auf dieser Grundlage gelingt es, Konvergenzbeweise für eine Reihe bekannter Iterationsverfahren zu verallgemeinern und zu vereinheitlichen. Darüber hinaus werden spezielle Darstellungen solcher Verfahren und Lösungseigenschaften der Grenzelemente x_∞ angegeben.

1. Affine Teilräume und affine Operatoren

Es sei X ein Banachraum.

Definition 1.1: Die (nicht leere) Teilmenge $\mathbf{M}$ von X heißt *affin*, falls für beliebige Skalare λ die Beziehung

$$\lambda \mathbf{M} + (1 - \lambda) \mathbf{M} \subseteq \mathbf{M} \tag{1.1}$$

gilt. Die Teilmenge $\mathbf{M}$ heißt *affiner Teilraum*, wenn sie affin und abgeschlossen ist.

In der englischsprachigen Literatur werden affine Mengen auch als lineare Varietäten (linear varieties) bezeichnet (siehe [3: S. 4, 14: S. 137]). Jeder affinen Menge $\mathbf{M}$ kann man auf natürliche Weise die lineare Menge

$$M := \mathbf{M} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - d \qquad (d \in \mathbf{M} \text{ beliebig}) \tag{1.2}$$

zuordnen, die wir den *linearen Teil* von $\mathbf{M}$ nennen. Ein System $\mathfrak{M}$ von affinen Mengen $\mathbf{M}$ heißt *zentriert*, wenn $\bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M} \neq \emptyset$ gilt. Ist $\mathfrak{M}$ zentriert, so ist $\bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}$ wieder eine affine Menge mit dem linearen Teil $\bigcap_{\mathbf{M} \in \mathfrak{M}} M$. Weiterhin sind in diesem Fall zwei Mengen aus $\mathfrak{M}$ genau dann gleich, wenn ihre linearen Teile übereinstimmen. Das Paar $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ affiner Teilräume $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ von X heißt *komplementär*, wenn $X = M \oplus N$ gilt. Ist $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ komplementär, so enthält $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ genau ein Element.

Es sei Y ein weiterer Banachraum.

Definition 1.2: Der Operator $\mathbf{A}$ von X in Y heißt *affin*, falls für beliebige Elemente x, y aus X und beliebige Skalare λ gilt:

$$\mathbf{A}\big(\lambda x + (1 - \lambda) y\big) = \lambda \mathbf{A}x + (1 - \lambda) \mathbf{A}y \tag{1.3}$$

(siehe [6: S. 35]). Mit $R(\mathbf{A})$ bezeichnen wir den *Wertebereich* und mit $N(\mathbf{A})$ den *Nullraum* $\{x \in X : \mathbf{A}x = \mathbf{A}0\}$ von $\mathbf{A}$. Schließlich bedeute $(X \to Y)$ die Menge aller affinen Operatoren von X in Y.

Jedem affinen Operator $\mathbf{A}$ kann man auf natürliche Weise den linearen Operator A mit

$$Ax := \mathbf{A}x - \mathbf{A}0 = \mathbf{A}(x + y) - \mathbf{A}y \qquad (y \in X \text{ beliebig}) \tag{1.4}$$

zuordnen, den wir den *linearen Teil* von $\mathbf{A}$ nennen. Der Wertebereich $R(\mathbf{A})$ eines affinen Operators $\mathbf{A}$ ist affin und besitzt den linearen Teil $R(A)$. Sein Nullraum $N(\mathbf{A})$ ist linear und stimmt mit $N(A)$ überein. Ist die Menge

$$X(\mathbf{A}, b) := \{x \in X : \mathbf{A}x = b\}, \qquad b \in Y, \tag{1.5}$$

nicht leer, so ist sie affin und besitzt den linearen Teil $N(A)$.

Die Menge $(X \to Y)$ läßt sich wie üblich zu einem linearen Raum machen. Dann ist für beliebige $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in (X \to Y)$ der Operator $A + B$ der lineare Teil von $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ und der Operator λA der lineare Teil von $\lambda\mathbf{A}$.

Definition 1.3: Ein Operator $\mathbf{A} \in (X \to Y)$ heißt *beschränkt*, falls die Halbnorm

$$[\![\mathbf{A}]\!] := \sup_{x \neq y} \frac{\|\mathbf{A}x - \mathbf{A}y\|}{\|x - y\|} = \|A\| \tag{1.6}$$

endlich ist. Die Menge aller beschränkten (bzw. stetigen) Operatoren aus $(X \to Y)$ wird mit $[X \to Y]$ bezeichnet.

Definition 1.4: Ein Operator $\mathbf{A} \in [X \to Y]$ heißt *einfach*, wenn zwei verschiedene Elemente x, y aus X mit

$$\|\mathbf{A}x - \mathbf{A}y\| = [\![\mathbf{A}]\!] \, \|x - y\| \tag{1.7}$$

existieren.

Der Operator $\mathbf{A}$ ist genau dann einfach, wenn seine linearer Teil A einfach ist. Einfache lineare Operatoren nennt man in der englischsprachigen Literatur auch „norm-attaining". Dem Beweis von Satz 4.5 in [10] kann man entnehmen, daß für reflexive Räume X kompakte Operatoren $\mathbf{A} \in [X \to Y]$ einfach sind.

Operatoren $\mathbf{A}$ aus dem Teilbereich

$$[X \to Y]_{b,x^*} := \{\mathbf{A} \in [X \to Y] : \mathbf{A}x^* = b\}, \qquad x^* \in X, \quad b \in Y \tag{1.8}$$

besitzen die Darstellung

$$\mathbf{A}x = A(x - x^*) + b. \tag{1.9}$$

Zwei Operatoren dieses Bereiches sind genau dann gleich, wenn ihre linearen Teile übereinstimmen. Eine Folge $(\mathbf{A}_n)$ von Operatoren $\mathbf{A}_n \in [X \to Y]_{b,x^*}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen einen Operator $\mathbf{A} \in [X \to Y]_{b,x^*}$, wenn $[\![\mathbf{A}_n - \mathbf{A}]\!] \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

Es sei jetzt $X = Y$. Dann wird $(X \to X)$ mit der üblichen Operatoraddition und -multiplikation zu einem Fastring. Weiterhin ist für beliebige $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in (X \to X)$ der Operator AB der lineare Teil von $\mathbf{AB}$. Entsprechend wird auch $[X \to X]$ zu einem Fastring, wobei für $\mathbf{AB} \in [X \to X]$ insbesondere $[\![\mathbf{AB}]\!] \leq [\![\mathbf{A}]\!] [\![\mathbf{B}]\!]$ gilt. Die *Fixpunktmenge* $F(\mathbf{A}) := \{x \in X : \mathbf{A}x = x\}$ eines Operators $\mathbf{A} \in (X \to X)$ ist affin und besitzt den linearen Teil $F(A)$. Eine Operatormenge $\mathfrak{A} \subseteq (X \to X)$ heißt *zentriert*, wenn das Mengensystem $\{F(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathfrak{A}\}$ zentriert ist, d. h., wenn $\bigcap_{\mathbf{A} \in \mathfrak{A}} F(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ gilt.

Ist $\mathfrak{A}$ zentriert und $x^* \in \bigcap_{\mathbf{A} \in \mathfrak{A}} F(\mathbf{A})$, dann gehören alle Operatoren $\mathbf{A}$ aus $\mathfrak{A}$ zu der multiplikativen Halbgruppe

$$[X]_{x^*} := [X \to X]_{x^*,x^*} = \{\mathbf{A} \in [X \to X] : x^* \in F(\mathbf{A})\}, \tag{1.10}$$

in der eine gleichmäßige Operatorkonvergenz erklärbar ist (vgl. (1.8)).

Ein indempotenter Operator $\mathbf{A} \in [X \to X]$ heißt (stetiger) *Projektor* in X. Für Projektoren $\mathbf{A}$ erhält man

$$R(\mathbf{A}) = F(\mathbf{A}) = N(I - A) + \mathbf{A}0, \qquad N(\mathbf{A}) = R(I - A).$$

Sie projizieren auf $R(\mathbf{A})$ längs $N(\mathbf{A})$. Jedem Projektor $\mathbf{A}$ entspricht gemäß der Zuordnung $R(\mathbf{A}) = \mathbf{M}$, $N(\mathbf{A}) = N$ eineindeutig ein komplementäres Paar $(\mathbf{M}, N)$ aus der affinen Menge $\mathbf{M}$ und der linearen Menge N.

2. Kollektive Operatormengen

Es sei X ein Banachraum, $\mathfrak{A}$ eine Teilmenge von $[X \to X]$ und $\mathbf{P}$ ein Projektor aus $[X \to X]$. Weiterhin bezeichnen $\mathfrak{A}_0$ die Menge aller A mit $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$.

Definition 2.1: Der Projektor $\mathbf{P}$ heißt *Projektionskern* von $\mathfrak{A}$, wenn

$$\mathbf{P} = \mathbf{PA} = \mathbf{AP} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A} \in \mathfrak{A}$$

gilt (vgl. Definition 1.1 in [9]). Die Operatormenge $\mathfrak{A}$ heißt $\mathbf{P}$-*kollektiv*, wenn

$$\mathbf{A} \mid R(\mathbf{P}) = \mathbf{I} \mid R(\mathbf{P}), \qquad \mathbf{A}N(\mathbf{P}) \subseteq N(\mathbf{P}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A} \in \mathfrak{A}$$

gilt.

Die beiden definierten Begriffe hängen unmittelbar zusammen.

Satz 2.2: *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

a) $\mathbf{P}$ *ist Projektionskern von* $\mathfrak{A}$.

b) $\mathfrak{A}$ *ist* $\mathbf{P}$-*kollektiv*.

c) *Es ist* $R(\mathbf{P}) \subseteq \bigcap_{\mathbf{A} \in \mathfrak{A}} F(\mathbf{A}), N(\mathbf{P}) \supseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{A \in \mathfrak{A}_0} R(I - A)}$.

d) *Jedes* $\mathbf{A}$ *aus* $\mathfrak{A}$ *ist die direkte Summe der beiden Operatoren* $I \mid R(P)$ *und* $\mathbf{A} \mid N(P)$, wobei stets $\mathbf{AP}0 \in R(\mathbf{P})$ gilt.

Beweis: Ersetzt man in a)—d) die Operatoren durch ihre linearen Teile, so entstehen die Bedingungen

a') $P^2 = P = PA = AP$ für alle $A \in \mathfrak{A}_0$,

b') $A \mid R(P) = I \mid R(P), \quad AN(P) \subseteq N(P) \quad$ für alle $A \in \mathfrak{A}_0$,

c') $R(P) \subseteq \bigcap_{A \in \mathfrak{A}_0} N(I - A), \quad N(P) \supseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{A \in \mathfrak{A}_0} R(I - A)}$,

d') $A = I \mid R(P) \oplus A \mid N(P)$ für alle $A \in \mathfrak{A}_0$.

Die Äquivalenz dieser Bedingungen wurde im wesentlichen in der Arbeit [9] des Autors gezeigt (siehe Sätze 2.3, 2.4 und 2.8). Aus a)—d) ergeben sich jeweils a')—d') und die Eigenschaften

e) $\mathfrak{A} \cup \{\mathbf{P}\}$ ist zentriert (bzw. $\left\{\bigcap_{\mathbf{A} \in \mathfrak{A}} F(\mathbf{A}), R(\mathbf{P})\right\}$ ist zentriert).

f) Es gilt $\mathbf{A}_0 \in N(\mathbf{P})$ für alle $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$.

Umgekehrt folgen unter den Voraussetzungen e), f) aus a')—d') auch jeweils a)—d) (siehe Abschnitt 1). Daraus erhält man sofort die Behauptungen des Satzes ∎

$\mathbf{P}$-kollektive Operatormengen sind stets zentriert. Will man feststellen, ob eine Operatormenge $\mathfrak{A}$ $\mathbf{P}$-kollektiv bezüglich irgendeines Projektors $\mathbf{P}$ ist, so gibt Bedingung c) einen wichtigen Anhaltspunkt, welche $\mathbf{P}$ als Kandidaten in Frage kommen. Bedingung d) spielt insbesondere bei Konvergenzbetrachtungen eine Rolle (siehe Abschnitt 4).

Für die weiteren Anwendungen ist es notwendig, den Begriff der $\mathbf{P}$-kollektiven Operatormengen weiter zu verschärfen.

Definition 2.3: Die Menge $\mathfrak{A}$ heißt *stark* $\mathbf{P}$-*kollektiv*, wenn

$$R(\mathbf{P}) = \bigcap_{\mathbf{A} \in \mathfrak{A}} F(\mathbf{A}), \qquad N(\mathbf{P}) \supseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{A \in \mathfrak{A}_0} R(I - A)}$$

gilt. Steht auch in der zweiten Beziehung das Gleichheitszeichen, so ist $\mathbf{P}$ eindeutig bestimmt und $\mathfrak{A}$ heißt einfach *stark kollektiv*.

Mit Hilfe von Satz 2.2 erkennt man sofort, daß jede stark $\mathbf{P}$-kollektive Menge $\mathfrak{A}$ auch $\mathbf{P}$-kollektiv ist. Weiterhin ergibt sich unmittelbar

Lemma 2.4: *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
a) $\mathfrak{A}$ *ist stark kollektiv.*
b) $\left(\bigcap_{\mathbf{A}\in\mathfrak{A}} F(\mathbf{A}), \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{A\in\mathfrak{A}_0} R(I-A)}\right)$ *ist komplementär.*
c) $\mathfrak{A}$ *ist zentriert, und es gilt* $X = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}_0} N(I-A) \oplus \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{A\in\mathfrak{A}_0} R(I-A)}$.

Beispiel 2.5: Zunächst ist $\{\mathbf{P}\}$ trivialerweise stark kollektiv. Allgemeiner ist für jeden Operator $\mathbf{A} \in [X \to X]$ mit

$$X = N(I-A) \oplus \overline{R(I-A)} \tag{2.1}$$

die einelementige Menge $\{\mathbf{A}\}$ stark kollektiv. Die Beziehung (2.1) ist etwa erfüllt, wenn die Folge (A^n) konvergiert oder wenn $I - A$ eine sogenannte Gruppen-Inverse besitzt (siehe [13, 7]).

Beispiel 2.6: Gilt in einem Hilbertraum $X = H$ für eine Menge $\mathfrak{A}$ und einen Projektor $\mathbf{P}$

$$\bigcap_{\mathbf{A}\in\mathfrak{A}} F(\mathbf{A}) = R(\mathbf{P}), \qquad A^2 = A = A^* \quad \text{auf } N(\mathbf{P}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A} \in \mathfrak{A}, \tag{2.2}$$

so ist $\mathfrak{A}$ stark kollektiv. Insbesondere ist jede zentrierte Menge $\mathfrak{A}$ von Operatoren $\mathbf{A}$, deren lineare Teile Orthoprojektoren sind, stark kollektiv (siehe hierzu [9: Lemma 5.3]).

3. Metrisch kollektive Projektormengen

Es sei X ein Banachraum, $\mathfrak{T}$ eine Menge von Projektoren aus $[X \to X]$ und $\mathbf{P}$ ein weiterer Projektor aus $[X \to X]$. Außerdem bezeichne $\mathfrak{T}_0$ die Menge aller T mit $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}$.

In [2] wird die Orthogonalität von Elementen bzw. Mengen in Banachräumen definiert. Diese Orthogonalität ist i. a. weder symmetrisch noch additiv. Wir wollen die Definition für unsere Zwecke etwas modifizieren.

Definition 3.1: Es sei M eine Teilmenge von X und m ein Element von M. Die Menge

$$\dashv(M, m) := \{x \in X : \|x - m\| = d(x, M)\}$$

heißt *Orthogonalmenge* zu M bezüglich m. Für $\dashv(M, 0)$ schreiben wir einfach $\dashv M$.

Die Beziehung $x \in \dashv(M, m)$ bedeutet offenbar, daß m eine beste Approximation (b.A.) von x in M ist. Im Hilbertraum ist $N \subseteq \dashv(M, m)$ äquivalent zu $M \subseteq \dashv(N, m)$. Schließlich gilt hier

$$\dashv M = \{x \in X : (x, y) = 0 \quad \text{für alle} \quad y \in M\},$$

so daß die Orthogonalität additiv und symmetrisch ist.

Definition 3.2: Die Menge $\mathfrak{T}$ heißt *metrisch* ($\mathbf{P}$-) *kollektiv*, wenn sie stark ($\mathbf{P}$-) kollektiv ist und auf $N(\mathbf{P})$ für alle $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}$ die Beziehung $R(\mathbf{T}) = \dashv(N(\mathbf{T}), \mathbf{T}0)$ besteht.

Die in Beispiel 2.6 genannten Operatormengen sind auch metrisch kollektiv. Wir wollen nun untersuchen, welche Eigenschaften die in Definition 3.2 vorkommende Beziehung $R(\mathbf{T}) = \dashv(N(\mathbf{T}), \mathbf{T}0)$ nach sich zieht.

Lemma 3.3: *Für lineare (stetige) Projektoren T sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) $R(T) \subseteq {}^{\dashv}N(T)$,
b) $x - Tx$ ist *b.A. von x in $N(T)$ für alle $x \in X$,*
c) $\|T\| = 1$.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus einem Satz in [7: S. 38–39], wenn man dort den Projektor T durch den Projektor $I - T$ ersetzt ∎

Satz 3.4: *Für $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) $R(\mathbf{T}) = {}^{\dashv}(N(\mathbf{T}), \mathbf{T}0)$,
b) $x - \mathbf{T}x + \mathbf{T}0$ *ist die eindeutig bestimmte b.A. von x in $N(\mathbf{T})$ für alle $x \in X$,*
c) $\|\mathbf{T}\| = 1$, $N(\mathbf{T})$ *ist Čebyshev-Menge,*
d) $\|\mathbf{T}x - \mathbf{T}0\| = \|x - \mathbf{T}0\|$ für alle $x \in R(\mathbf{T})$,
$\|\mathbf{T}x - \mathbf{T}0\| < \|x - \mathbf{T}0\|$ für alle $x \notin R(\mathbf{T})$.

Man erhält weitere dazu äquivalente Bedingungen, wenn man $\mathbf{T}$ jeweils durch seinen linearen Teil ersetzt.

Beweis: Man sieht leicht, daß die Bedingungen bei Ersetzung von $\mathbf{T}$ durch T in äquivalente Bedingungen übergehen. Wir können uns daher darauf beschränken, die Behauptungen für $T \in \mathfrak{T}_0$ zu beweisen.

1. Es sei $R(T) = {}^{\dashv}N(T)$. Dann ist $x - Tx$ nach Lemma 3.3 eine b.A. von x in $N(T)$. Es sei y eine beliebige b.A. von x in $N(T)$. Damit gilt $\|x - y\| \leqq \|x - z\|$ für alle $z \in N(T)$. Wegen $y \in N(T)$ bedeutet das auch $\|x - y\| \leqq \|x - y - z\|$ für alle $z \in N(T)$. Also gehört $x - y$ zu ${}^{\dashv}N(T) = R(T)$. Daraus ergibt sich aber

$$x - Tx = x - T(y + (x - y)) = x - (x - y) = y.$$

2. Es sei $x - Tx$ für alle $x \in X$ die eindeutig bestimmte b.A. von x in $N(T)$. Dann gilt nach Lemma 3.3 offenbar $\|T\| = 1$. Außerdem ist $N(T)$ nach Definition eine Čebyshev-Menge.

3. Es sei $\|T\| = 1$ und $N(T)$ eine Čebyshev-Menge. Dann erhält man sofort $\|Tx\| \leqq \|x\|$ für alle $x \in X$ und $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $v \in R(T)$. Wir wollen zeigen, daß umgekehrt aus $\|Tx\| = \|x\|$ auch $x \in R(T)$ folgt. Dazu sei x ein beliebiges Element mit $\|Tx\| = \|x\|$. Dieses x genügt für alle $z \in N(T)$ der Beziehung $\|x\| = \|T(x - z)\| \leqq \|x - z\|$ und liegt damit in ${}^{\dashv}N(T)$. Stellt man x in der Form $x = x_0 + x_1$ $(x_0 \in R(T),\ x_1 \in N(T))$ dar, so gilt sowohl $\|x_0\| \leqq \|x_0 - z\|$ als auch $\|x\| = \|x_0 - (-x_1)\| \leqq \|x_0 - (-x_1) - z\|$ für alle $z \in N(T)$. Wegen $x_1 \in N(T)$ ergibt die letzte Ungleichung auch $\|x_0 - (-x_1)\| \leqq \|x_0 - z\|$ für alle $z \in N(T)$. Demnach sind die beiden Elemente 0 und $-x_1$ b.A. von x_0 in $N(T)$. Da $N(T)$ nach Voraussetzung eine Čebyshev-Menge ist, muß $x_1 = 0$ sein. Also gehört x zu $R(T)$. Das bedeutet aber $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in R(T)$ und $\|Tx\| < \|x\|$ für alle $x \notin R(T)$.

4. Es sei $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in R(T)$ und $\|Tx\| < \|x\|$ für alle $x \notin R(T)$. Dann gilt $\|T\| = 1$. Nach Lemma 3.3 erhält man daraus $R(T) \subseteq {}^{\dashv}N(T)$. Wir zeigen, daß auch ${}^{\dashv}N(T) \subseteq R(T)$ erfüllt ist. Ein beliebiges Element x aus ${}^{\dashv}N(T)$ genügt für alle $z \in N(T)$ der Ungleichung $\|x\| \leqq \|x - z\|$. Setzt man speziell $z = (I - T)x$, gelangt man zu $\|x\| \leqq \|Tx\|$. Da andererseits auch $\|Tx\| \leqq \|x\|$ gilt, folgt $x \in R(T)$ ∎.

Definition 3.4: Es seien $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ zwei affine Teilräume von X. Weiterhin bezeichne S_N die Menge $\{x \in N : \|x\| = 1\}$. Dann heißt die Zahl

$$\delta(\mathbf{N}, \mathbf{M}) := \sup_{x \in S_N} d(x, M)$$

Öffnung von $\mathbf{N}$ bezüglich $\mathbf{M}$ und die Zahl

$$\delta'(\mathbf{N}, \mathbf{M}) := \max\{\delta(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N})\}$$

Öffnung zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{M}$ (vgl. [3: S. 197]).

Es ist offenbar stets $0 \leqq \delta(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \leqq \delta'(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \leqq 1$. Für Operatoren $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}$ mit $R(\mathbf{T}) = {}^{\dashv}(N(\mathbf{T}), \mathbf{T}0)$ kann man $[\![\mathbf{T}]\!]$ auf Teilräumen durch Öffnungen ausdrücken.

Lemma 3.6: *Es sei* $\mathbf{N}$ *ein affiner Teilraum von* X *und* $\mathbf{T} \in \mathfrak{T}$ *ein Operator mit* $R(\mathbf{T}) = {}^{\dashv}(N(\mathbf{T}), \mathbf{T}0)$. *Dann gilt*

$$\delta(\mathbf{N}, N(\mathbf{T})) = [\![\mathbf{T} \mid N]\!].$$

Beweis: Unter Beachtung von Definition 3.5 und Satz 3.4 erhält man

$$\delta(\mathbf{N}, N(\mathbf{T})) = \sup_{x \in S_N} d(x, N(T)) = \sup_{x \in S_N} \|x - (x - Tx)\| = \|T \mid N\| = [\![\mathbf{T} \mid N]\!] \;\blacksquare$$

4. Konvergenzaussagen für Iterationsverfahren mit affinen Operatoren

Es sei X ein Banachraum und $\mathbf{P}$ ein Projektor aus $[X \to X]$. Wir betrachten jetzt Folgen $(\mathbf{A}_n)$ mit $\mathbf{A}_n \in [X \to X]$ und $(\mathbf{F}_n)$ mit $\mathbf{F}_n := \mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n-1} \ldots \mathbf{A}_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Diese Folgen treten bei dem (i. a. instationären) Iterationsverfahren

$$x_{n+1}(x) := \mathbf{A}_n x_n(x) = \mathbf{F}_n x \tag{4.1}$$

auf.

Lemma 4.1: *Es sei* $\{\mathbf{A}_n\}$ $\mathbf{P}$*-kollektiv. Dann gilt:*

a) $\{\mathbf{F}_n\}$ ist $\mathbf{P}$*-kollektiv.*

b) $(\mathbf{F}_n)$ *konvergiert genau dann (stark bzw. gleichmäßig) gegen* $\mathbf{P}$, *wenn* $(\mathbf{F}_n)$ *auf* $N(P)$ *(stark bzw. gleichmäßig) gegen (den Nulloperator)* 0 *konvergiert.*

Beweis: Aus $\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{P}$ folgt auch $\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n\mathbf{P}$ und damit a). Die Behauptung b) ergibt sich direkt aus Satz 2.2 (siehe d')) $\blacksquare$

Satz 4.2: *Die Folge* $(\mathbf{F}_n)$ *konvergiere (stark bzw. gleichmäßig) gegen den Grenzoperator* $\mathbf{F}_\infty$. *Dann sind die nachstehenden Bedingungen äquivalent:*

a) $\mathbf{F}_\infty$ *ist ein Projektionskern von* $\{\mathbf{A}_n\}$.

b) *Es ist* $R(\mathbf{F}_\infty) = \bigcap_n F(\mathbf{A}_n)$, $N(\mathbf{F}_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n R(I - A_n)}$.

Unter jeder dieser Bedingungen hat das Grenzelement x_∞ *von* (4.1) *die Eigenschaften*

c) $x_n(x_\infty) = x_\infty$, $x_\infty(x_n) = x_\infty(x)$ für alle n.

Beweis: Zunächst ist a) nach Satz 2.2 äquivalent zu

b') $\quad R(\mathbf{F}_\infty) \subseteq \bigcap_n F(\mathbf{A}_n)$, $N(\mathbf{F}_\infty) \supseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n R(I - A_n)}$.

Man beachte dabei, daß aus b') die Idempotenz von F_∞ folgt. Die Folge (F_n) konvergiert offenbar gegen F_∞. Aus der Gleichungskette

$$I - F_n = \sum_{i=0}^{n} A_n \ldots A_{i+1}(I - A_i) = \sum_{i=0}^{n} (I - A_i)\, A_{i-1} \ldots A_0$$

erhält man sofort

$$N(I - F_\infty) \supseteq \bigcap_n F(A_n), \qquad R(I - F_\infty) \subseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n R(I - A_n)}.$$

Außerdem gilt $R(F_\infty) \supseteq N(I - F_\infty)$ und $N(F_\infty) \subseteq R(I - F_\infty)$. Unter der Voraussetzung a) ist $\{\mathbf{A}_n, \mathbf{F}_\infty\}$ zentriert, so daß auch

$$R(\mathbf{F}_\infty) \supseteq \bigcap_n F(\mathbf{A}_n), \qquad N(\mathbf{F}_\infty) \subseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n R(I - A_n)}$$

erfüllt ist. Unter Beachtung von b′) ergibt sich die Äquivalenz von a) und b). Schließlich zieht a) sofort c) nach sich ∎

Folgerung 4.3: *Ist* $\{\mathbf{A}_n\}$ $\mathbf{P}$*-kollektiv und konvergiert* $(\mathbf{F}_n)$ *(stark bzw. gleichmäßig) gegen* $\mathbf{P}$, *dann ist* $\{\mathbf{A}_n\}$ *stark kollektiv.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathbf{F}_\infty = \mathbf{P}$. Aus Satz 4.2 und Definition 2.3 resultiert die Behauptung ∎

Wir wenden uns nun Folgen $(\mathbf{T}_n)$ von Projektoren $\mathbf{T}_n \in [X \to X]$ zu und wollen Konvergenzsätze für die Produktfolge $(\mathbf{P}_n)$ mit $\mathbf{P}_n := \mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_0$ herleiten. Eine erste einfache Aussage erhält man unter Verwendung des Öffnungsbegriffes (siehe Definition 3.5). Im weiteren bedeute

$$\tilde{\mathbf{T}}_n := \mathbf{T}_n \mid N(P), \qquad \delta_n(\mathbf{P}) := \delta\big(R(\tilde{\mathbf{T}}_{n-1}), N(\tilde{\mathbf{T}}_n)\big), \qquad \tilde{\mathbf{I}}_1 := I/N(P).$$

Satz 4.4: *Es sei* $\{\mathbf{T}_n\}$ *metrisch* $\mathbf{P}$*-kollektiv. Enthält die Folge* $\big(\delta_n(\mathbf{P})\big)$ *eine Teilfolge* $\big(\delta_{n'}(\mathbf{P})\big)$ *mit* $\gamma := \sup_n \delta_{n'}(\mathbf{P}) < 1$, *so konvergiert* $(\mathbf{P}_n)$ *gleichmäßig gegen* $\mathbf{P}$. *Dabei gilt*

$$R(\mathbf{P}) = \bigcap_n R(\mathbf{T}_n), \qquad N(\mathbf{P}) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n N(\mathbf{T}_n)}.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\tilde{P}_n := P_n \mid N(P)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Es ergibt sich

$$\|\tilde{P}_n\| \leqq \prod_{i=0}^{n} \|\tilde{T}_i \mid R(\tilde{P}_{i-1})\| = \prod_{i=0}^{n} \delta\big(R(\tilde{P}_{i-1}), N(\tilde{T}_i)\big)$$

$$\leqq \prod_{i=0}^{n} \delta\big(R(\tilde{T}_{i-1}), N(\tilde{T}_i)\big) = \prod_{i=0}^{n} \delta_i(\mathbf{P}).$$

Den Beweis für die erste Abschätzung findet man in [10]. Außerdem wurde Lemma 3.6 benutzt. Ist m_0' das maximale m' mit $m' \leqq n$, so erhält man weiter

$$\prod_{i=0}^{n} \delta_i(\mathbf{P}) \leqq \gamma^{m_0+1} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

denn mit n strebt auch m_0 gegen Unendlich. Daraus gewinnt man in Verbindung mit Lemma 4.1 die erste Behauptung. Nach Folgerung 4.3 ist $\{\mathbf{T}_n\}$ damit stark kollektiv. Berücksichtigt man, daß die $\mathbf{T}_n$ Projektoren sind, gelangt man zur zweiten Behauptung ∎

Der letzte Satz beweist sofort

Folgerung 4.5: *Es sei* $\{\mathbf{T}_n\}$ *metrisch* $\mathbf{P}$*-kollektiv. Enthält* $\{\mathbf{T}_n\}$ *nur endlich viele verschiedene Operatoren* $\mathbf{T}_{n_1}, \dots, \mathbf{T}_{n_m}$ *mit*

$$\delta\big(R(\tilde{\mathbf{T}}_{n_i}), N(\tilde{\mathbf{T}}_{n_j})\big) < 1 \qquad (i, j \in \{1, \dots, m\},\ i \neq j)$$

und kommen mindestens zwei der Operatoren $\mathbf{T}_{n_i}$ *unendlich oft in* $(\mathbf{T}_n)$ *vor, so konvergiert* $(\mathbf{P}_n)$ *gleichmäßig gegen* $\mathbf{P}$.

Die obigen Aussagen bleiben natürlich richtig, wenn man die Öffnungen δ durch die symmetrisierten Öffnungen δ' ersetzt (siehe Definition 3.5). Es sei noch darauf hingewiesen, daß $\delta_n(\mathbf{P}) < 1$ notwendigerweise $\dim R(\tilde{T}_{n-1}) \leqq \dim N(\tilde{T}_n)$ und $\delta_n'(\mathbf{P}) < 1$ notwendigerweise $\dim R(\tilde{T}_{n-1}) = \dim N(\tilde{T}_n)$ nach sich zieht (siehe [3: S. 200]). In Hilberträumen ist außerdem $\delta_n'(\mathbf{P}) = \|I - \tilde{T}_{n-1} - \tilde{T}_n\|$ (vgl. [1: S. 95]).
Das folgende Lemma bereitet den zweiten Konvergenzsatz vor, der Satz 4.10 aus [10] verallgemeinert.

Lemma 4.6: *Es sei* $\{\mathbf{T}_n\}$ *metrisch* $\mathbf{P}$*-kollektiv. Dann gilt für jedes Teilprodukt* $\mathbf{T} := \mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1}\ldots\mathbf{T}_l$ *von* $(\mathbf{T}_n)$ *mit* $R(\mathbf{P}) = \bigcap_{i=l}^{k} R(\mathbf{T}_i)$ *die Ungleichung* $\|Tx\| < \|x\|$, *falls* x *in* $N(\mathbf{P}) \setminus \{0\}$ *liegt. Ist* $\mathbf{T}$ *außerdem einfach, dann gilt sogar* $\|T \mid N(\mathbf{P})\| < 1$.

Beweis: Alle Operatoren $\tilde{T}_n$ besitzen nach Definition 3.2 und Lemma 3.3 die Norm 1. Weiterhin ist aufgrund von Satz 3.4 für alle $x \in N(\mathbf{P}) \setminus R(\tilde{T}_n)$ die Ungleichung $\|\tilde{T}_n x\| < \|x\|$ erfüllt. Schließlich bedeutet $R(\mathbf{P}) = \bigcap_{i=l}^{k} R(\mathbf{T}_i)$ offenbar $\bigcap_{i=l}^{k} R(\tilde{T}_i) = \{0\}$. Sei nun $x \in N(\mathbf{P}) \setminus \{0\}$. Dann existiert also ein $i \in \{l, \ldots, k\}$ mit $x \notin R(\tilde{T}_i)$. Wird i minimal gewählt, erhält man somit

$$\|\tilde{T}x\| = \|\tilde{T}_k \ldots \tilde{T}_i \ldots \tilde{T}_l x\| \leqq \|\tilde{T}_i \ldots \tilde{T}_l x\| = \|\tilde{T}_i x\| < \|x\|.$$

Die letzte Behauptung ist unmittelbar einzusehen (vgl. Definition 1.4) ∎

Satz 4.7: *Es sei* $\{\mathbf{T}_n\}$ *metrisch* $\mathbf{P}$*-kollektiv. Außerdem mögen unendlich viele Teilprodukte* $\mathbf{T}_{kl} := \mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1}\ldots\mathbf{T}_l$ *von* $(\mathbf{T}_n)$ *existieren, so daß gilt:*
a) $\{\mathbf{T}_l, \ldots, \mathbf{T}_k\} = \{\mathbf{T}_n\}$,
b) $k - l \leqq r$ *für ein gewisses festes* r,
c) $\mathbf{T}_{kl}$ *einfach auf* $N(\mathbf{P})$.
Dann konvergiert $(\mathbf{P}_n)$ *gleichmäßig gegen* $\mathbf{P}$. *Dabei ist*

$$R(\mathbf{P}) = \bigcap_n R(\mathbf{T}_n), \qquad N(\mathbf{P}) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n N(\mathbf{T}_n)}.$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller Teilprodukte $\mathbf{T}_{kl}$, die den Bedingungen a)—c) genügen. Zunächst ist für $\mathbf{T}_{kl} \in \mathfrak{B}$ die Beziehung $R(\mathbf{P}) = \bigcap_n R(\mathbf{T}_n) = \bigcap_{i=l}^{k} R(\mathbf{T}_i)$ erfüllt. Daher gilt nach Lemma 4.6 auch $\|\tilde{T}_{kl}\| < 1$. Weiterhin ist $\mathfrak{B}$ eine endliche Menge, so daß $\Gamma := \sup_{\mathbf{T}_{kl} \in \mathfrak{B}} \|\tilde{T}_{kl}\|$ kleiner als 1 ausfällt. In jedem Produkt $\mathbf{P}_n$ läßt sich eine gewisse Anzahl m_n von Teilprodukten $\mathbf{T}_{k_i l_i}$ bilden, so daß die $\mathbf{T}_{k_i l_i}$ zu $\mathfrak{B}$ gehören und die Mengen $\{l_i, \ldots, k_i\}$ paarweise disjunkt sind. Da sämtliche $\tilde{T}_n$ die Norm 1 besitzen, ergibt sich daraus die Abschätzung $\|\tilde{P}_n\| \leqq \Gamma^{m_n}$. Schließlich sichern die Voraussetzungen des Satzes, daß mit n auch m_n über alle Grenzen wachsend gewählt werden kann. Damit konvergiert $\tilde{P}_n$ gleichmäßig gegen 0 und nach Lemma 4.1 ebenso $\mathbf{P}_n$ gleichmäßig gegen $\mathbf{P}$. Die letzte Behauptung resultiert unmittelbar aus Folgerung 4.3 ∎

Folgerung 4.8: *Es sei* $\{\mathbf{T}_n\}$ *metrisch* $\mathbf{P}$*-kollektiv. Weiterhin sei* $N(\mathbf{P})$ *reflexiv und* $R(\tilde{\mathbf{T}}_n)$ *für irgendein* n *endlichdimensional. Existieren unendlich viele Teilprodukte* $\mathbf{T}_{kl}$ *von* $(\mathbf{T}_n)$ *mit*
a) $\{\mathbf{T}_l, \ldots, \mathbf{T}_k\} = \{\mathbf{T}_n\}$,
b) $k - l \leqq r$ *für ein gewisses festes* r,
so konvergiert $(\mathbf{P}_n)$ *gleichmäßig gegen* $\mathbf{P}$.

Beweis: Da eines der $R(\tilde{T}_n)$ nach Voraussetzung endlichdimensional ist, ist einer der Operatoren $\tilde{T}_n$ und somit jedes Teilprodukt $\tilde{T}_{kl}$ von $(\tilde{P}_n)$ kompakt (siehe [14: S. 285]). Nach den Bemerkungen im Anschluß an Definition 1.4 bewirkt die Reflexivität von $N(\mathbf{P})$, daß sämtliche Teilprodukte $\mathbf{T}_{kl}$ von $(\mathbf{P}_n)$ auf $N(\mathbf{P})$ einfach sind. Demnach ist Satz 4.7 anwendbar ∎

5. Verfahren der affin projizierten Iterationen

Es sei X ein Banachraum und $(\mathbf{T}_n)$ eine Folge von Projektoren $\mathbf{T}_n \in [X \to X]$. Dann nennen wir

$$x_{n+1}(x) := \mathbf{T}_n x_n(x) = \mathbf{P}_n x. \tag{5.1}$$

Verfahren der affin projizierten Iterationen. Mit Hilfe von Satz 4.4 und Satz 4.7 erhält man unmittelbar Konvergenzaussagen für dieses allgemeine Verfahren. Wir wollen hier einige Realisierungen des Verfahrens angeben. Auf die jeweilige Konkretisierung der Konvergenzsätze 4.4 und 4.7 verzichten wir jedoch. In spezielleren Fällen findet man solche Aussagen etwa in [4, 5, 8] und insbesondere in [11]. Wir werden der Einfachheit halber i. a. voraussetzen, daß die auftretenden linearen Operatoren einen abgeschlossenen Wertebereich besitzen.

a) Es sei neben X eine Folge (Y_n) weiterer Banachräume gegeben. Wir betrachten nun lineare Gleichungen

$$A_n x = b_n \quad \big(A_n \in L(X, Y_n),\, b_n \in Y_n\big), \tag{5.2}$$

für die die Zerlegungen

$$X = N(A_n) \oplus N_n, \qquad Y_n = R(A_n) \oplus M_n \tag{5.3}$$

gelten. Durch diese Zerlegungen sind eindeutig verallgemeinerte Inverse $A_n^+ \in L(Y_n, X)$ von A_n festgelegt ($A_n A_n^+ A_n = A_n$, $A_n^+ A_n A_n^+ = A_n^+$, siehe [7]). Daraus gewinnt man die Projektoren $\mathbf{T}_n \in [X \to X]$ mit

$$\mathbf{T}_n x := (I - A_n^+ A_n)\, x + A_n^+ b_n \qquad (x \in X) \tag{5.4}$$

und mit

$$R(\mathbf{T}_n) = X(A_n^+ A_n, A_n^+ b_n) = X(A_n, A_n A_n^+ b_n) = N(A_n) + A_n^+ b_n,$$
$$N(T_n) = N_n = R(A_n^+).$$

Dabei sei auf die Bezeichnung (1.5) hingewiesen. Für $X(A_n, b_n) \neq \varnothing$ gelangt man zu $R(\mathbf{T}_n) = X(A_n, b_n)$. Sind die Bedingungen

$$\bigcap_n X(A_n^+ A_n, A_n^+ b_n) \neq \varnothing, \qquad N(A_n) = {}^{\dashv} N_n \quad \text{für alle } n$$

erfüllt, so ist $\{\mathbf{T}_n\}$ metrisch kollektiv, falls X ein Hilbertraum ist.

b) Es sei Y ein Banachraum und

$$Ax = b \quad \big(A \in L(X, Y),\, b \in Y\big) \tag{5.5}$$

eine lineare Gleichung. Bestimmt man eine Folge (D_n) von Operatoren $D_n \in L(Y, X)$ derart, daß

$$D_n A D_n = D_n \tag{5.6}$$

gilt, so kann man die Projektoren $\mathbf{T}_n \in [X \to X]$ mit

$$\mathbf{T}_n x := (I - D_n A)\, x + D_n b \qquad (x \in X) \tag{5.7}$$

bilden. Hier ergibt sich

$$R(\mathbf{T}_n) = X(D_n A, D_n b) = N(D_n A) + D_n b\,, \qquad N(\mathbf{T}_n) = R(D_n A) = R(D_n).$$

Ist X ein Hilbertraum, dann ist $\{\mathbf{T}_n\}$ unter den Voraussetzungen

$$\bigcap_n X(D_n A, D_n b) \neq \varnothing\,, \qquad N(D_n A) = {}^{\dashv}R(D_n A) \quad \text{für alle } n$$

metrisch kollektiv.

Neben den Projektoren $\mathbf{T}_n$ spielen auch die Projektoren $S_n \in [Y \to Y]$ mit

$$S_n y := (I - AD_n)\, y \qquad (y \in Y) \tag{5.8}$$

eine Rolle, die $b - Ax$ in $b - A\mathbf{T}_n x$ transformieren und so die Restiteration zu (5.1) erzeugen. Dabei bekommt man

$$R(S_n) = N(AD_n) = N(D_n), \qquad N(S_n) = R(AD_n).$$

Für einen Hilbertraum Y ist $\{S_n\}$ unter der Bedingung $N(AD_n) = {}^{\dashv}R(AD_n)$ $(\forall n)$ metrisch kollektiv.

c) Ist neben der Gleichung (5.5) eine Folge (G_n) von Operatoren $G_n \in L(Y, Y_n)$ gegeben, so kann man $A_n := G_n A$ und $b_n := G_n b$ wählen (siehe (5.2)). Gelten dann die Zerlegungen (5.3), sind durch (5.4) Projektoren $\mathbf{T}_n$ erklärt. Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man in (5.7) $D_n := (G_n A)^+ G_n$ setzt.

d) Geht man von einer Operatorfolge (H_n) mit $H_n \in L(Y_n, X)$ aus und sind die Beziehungen

$$Y = R(AH_n) \oplus L_n\,, \qquad Y_n = N(AH_n) \oplus M_n \tag{5.9}$$

erfüllt, so genügt $D_n := H_n(AH_n)^+$ der Gleichung (5.6). Damit können die Projektoren (5.7) und (5.8) gebildet werden. Hier hat S_n die Gestalt

$$S_n y = (I - B_n B_n^{+})\, y\,, \qquad B_n := AH_n. \tag{5.10}$$

Schließlich ist $R(S_n) = L_n = N(B_n^{+})$, $N(S_n) = R(B_n)$.

6. Iterative Bestimmung von verallgemeinerten Lösungen linearer Gleichungen

Will man die im vorigen Abschnitt charakterisierten Verfahren der affin projizierten Iterationen zur Lösung linearer Gleichungen einsetzen, muß man die Lösungseigenschaften der Grenzelemente x_∞ kennen. Wir erwähnen hier einige einfache Resultate, die man der Arbeit [11] entnehmen kann. Eine detailliertere Darstellung dieser Problematik findet man in [11] und [12].

Gegeben seien zwei Banachräume X, Y und eine Folge (Y_n) von weiteren Banachräumen. Wir betrachten die Gleichung

$$Ax = b \qquad \big(A \in L(X, Y),\, b \in Y\big) \tag{6.1}$$

und das daraus von einer Operatorfolge (F_n) mit $F_n \in L(Y, Y_n)$ erzeugte Ersatz(gleichungs)system

$$F_n A x = F_n b \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.2}$$

Die Lösungen dieses Systems heißen bezüglich (F_n) *verallgemeinerte Lösungen* der Gleichung (6.1).

Wir wenden uns nun dem Iterationsverfahren (5.1) mit (5.6), (5.7) und der entsprechenden Restiteration

$$r_{n+1}(r) = S_n r_n(r) = Q_n r, \qquad r := b - Ax \tag{6.3}$$

mit (5.6), (5.8) zu.

Lemma 6.1: *Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*
a) *Das Ersatzsystem* $D_n A x = D_n b$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *ist lösbar.*
b) *Die Folge* (P_n) *mit* $P_n := (I - D_n A)(I - D_{n-1}A) \ldots (I - D_0 A)$ *konvergiert.*
c) *Der Grenzoperator* P_∞ *genügt für alle n der Beziehung* $D_n A P_\infty = 0$ (bzw. $(I - D_n A) \times P_\infty = P_\infty$).
Dann existiert das Grenzelement x_∞ *der Iteration und stellt eine bezüglich* (D_n) *verallgemeinerte Lösung von* (6.1) *dar.*

Lemma 6.2: *Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*
a) *Die Folge* (Q_n) *konvergiert.*
b) *Der Grenzoperator* Q_∞ *genügt für alle n der Beziehung* $D_n Q_\infty = 0$ (bzw. $A(I - AD_n) Q_\infty = Q_\infty$).
Dann existiert das Grenzelement r_∞ *der Restiteration* (6.3), *und es besteht für alle n die Gleichung* $D_n r_\infty = 0$. *Existiert auch das Element* x_∞, *so ist es eine bezüglich* (D_n) *verallgemeinerte Lösung von* (6.1).

Liegt D_n in der Produktform

$$D_n = R_n F_n \qquad \big(F_n \in L(Y, Y_n),\ R_n \in L(Y_n, X)\big)$$

vor, so ist offenbar jede bezüglich (F_n) verallgemeinerte Lösung von (6.1) auch bezüglich (D_n) verallgemeinerte Lösung. Umgekehrt ist jede bezügliche (D_n) verallgemeinerte Lösung von (6.1) auch bezüglich (F_n) verallgemeinerte Lösung, wenn $\bigcap_n N(D_n) = \bigcap_n N(F_n)$ gilt.

LITERATUR

[1] ACHIESER, N. I., und I. M. GLASMANN: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Akademie-Verlag: Berlin 1968.

[2] JAMES, R. C.: Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.

[3] KATO, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag: Berlin [West] 1966.

[4] MAESS, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Nova Acta Leopoldina, Neue Folge **238**, Band **52**, Halle 1979.

[5] MAESS, G., und W. PETERS: Lösung inkonsistenter linearer Gleichungssysteme und Bestimmung einer Pseudoinversen für rechteckige Matrizen durch Spaltenapproximation. Z. Angew. Math. Mech. **58** (1978), 233–237.

[6] NAAS, J., und L. SCHMID [Herausgeber]: Mathematisches Wörterbuch. Akademie-Verlag: Berlin 1961.

[7] NASHED, M. Z., and G. F. VOTRUBA: A unified operator theory of generalized inverses. In: Generalized Inverses and Applications (ed.: M. Z. Nashed). Academic Press, New York 1976, 1–109.

[8] PETERS, W.: Lösung linearer Gleichungssysteme durch Projektion auf Schnitträume von Hyperebenen und Berechnung einer verallgemeinerten Inversen. Beitr. zur Num. Math. **5** (1976), 129–146.

[9] SCHOTT, D.: Projektionskerne einer Operatorfolge. Beiträge zur Analysis **18** (1981), 31–41.

[10] SCHOTT, D.: Zur Konvergenz von Operatorfolgen im Zusammenhang mit Iterationsverfahren. Math. Nachr. **104** (1981) 253—270.
[11] SCHOTT, D.: Endlich erzeugte Projektionsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen im Hilbertraum. Rostock. Math. Kolloq. **16** (1981), 103—128.
[12] SCHOTT, D., und W. PETERS: Über Nullräume, Wertebereiche und Relationen von Operatoren, die bei instationären Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen auftreten. Z. Anal. Anw. **17** (1981), 71—85.
[13] SCHOTT, D.: Decomposition properties of linear continuous operators in Banach spaces (erscheint bei Demonstratio Mathematica).
[14] TAYLOR, A. E.: Introduction to Functional Analysis. John Wiley & Sons: New York 1958.

Manuskripteingang: 15. 1. 1982

VERFASSER:

Dr. sc. nat. DIETER SCHOTT
Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Liselotte Herrmann"
DDR-2600 Güstrow, Goldberger Str. 12