Publ. RIMS Kyoto Univ. **47** (2011)

Preface to the special issue "The Golden Jubilee of Algebraic Analysis"

Fifty years have elapsed since Professor Mikio Sato gave an epoch-making talk "On linear partial differential equations" at a colloquium of the University of Tokyo. The talk started with the discussion of E. Cartan's existence theorem for total differential systems, and it proposed to analyze systems of linear differential equations from the viewpoint of $\mathcal{D}$-modules with emphasis on the importance of (what we now call) holonomic systems. Besides this talk, the publication of papers "Theory of hyperfunctions, I and II" (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** (1959/1960)), construction of the theory of prehomogeneous vector spaces, study of the relation between the Ramanujan conjecture and the Weil conjecture, and the presentation of what we call the Sato–Tate conjecture were all made around 1960 (1959–1963) by Professor Sato, who thus brought about the renaissance of algebraic analysis, the spirit of Euler's mathematics. Hence it seemed appropriate to commemorate in 2011 the golden jubilee of algebraic analysis of our age, and accordingly the editorial board of Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences decided to publish this issue. In January of 2009, we sent letters to mathematicians who seemed to have been substantially influenced by Professor Sato, inviting them to contribute papers to this special issue, and the outcome is this. We sincerely thank all the authors for having contributed such excellent papers observing the tight schedule. We also express our heartiest thanks to the Graduate School of Mathematical Sciences of the University of Tokyo for having allowed us to reproduce on pages 2–9 of this issue the notes of Professor Sato's talk in 1960. Our sincerest thanks also go to Professor H. Komatsu, who took the notes.

Together with all the contributors, we wish Professor Sato, who is now 82 years old, an enjoyable reading; all the contributions were made in response to our request of providing papers which Professor Sato would be interested in.

Advisory board of this special issue:

Michio Jimbo (Rikkyo University)
Masaki Kashiwara (RIMS)
Takahiro Kawai (Kyoto University)
Tetsuji Miwa (Kyoto University)
Hiraku Nakajima (RIMS)
Toshio Oshima (University of Tokyo)

1960. VI. 24.

~~1960. III. 2~~

佐藤幹夫氏

線型偏微分方程式について

§.0 まえおき

1 Cauchy - Kowalewski の存在定理

$z_1, \dots, z_m$, 独立変数 $w_1, \dots, w_m$ 従属変数

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial z_1} = F_\nu\Big(z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n, \underset{\underset{p_{12}}{\shortparallel}}{\frac{\partial w_1}{\partial z_2}}, \dots, \underset{\underset{p_{nm}}{\shortparallel}}{\frac{\partial w_n}{\partial z_m}}\Big)$$

$$\nu = 1, \dots, m.$$

$z_1 = \zeta_1$ で $w_1, \dots, w_n, z_1, \dots, z_m$

を与えると 近傍で解が存在する.

すべて解析函数とする.

2. E. Cartan の存在定理.

第一定理. — Cauchy - Kowalewsky と同等.

$\dfrac{\partial w_i}{\partial z_j} = p_{ij}$ とおきこれも变数とみると

ある manifold 上の

$$\Omega_\nu = dw_\nu - \sum_{\mu=1} p_{\nu\mu}\, dx_\nu = 0$$

という Pfaff 方程式になる.

一般に. manifold X に.

$$\begin{cases} F_\alpha(z_1, \dots, z_\nu) = 0 \\ \Omega_\beta \equiv \sum A_{\beta\nu}\, dz_\nu = 0 \\ \textcircled{\scriptsize Ω}_\gamma = \sum_{\mu<\nu} B_{\gamma\mu\nu}\, dz_\mu \wedge dz_\nu = 0 \\ \dots\dots \end{cases}$$

外微分で閉じた系とする。

$V \longrightarrow X$ なる map で $F\ \Omega\ \Theta$ が 0 になるとき integral manifold という
これをすべて求めることが問題である。

$n-1$ 次元の integral manifold が与えられているとき n 次元の integral manifold を求めること。

Cartan の存在定理は generic な場合について 解の存在と どれくらいあるかを代数的にあらわすものである。

解多様体は tangent space の subspace を定める。ある点の tang space の subspace で 方程式をみたすものを integral element という。

regular integral element E^{h-1} に対し。
E^{h-1} ~~を通る~~ を通る解多様体 V^{h-1} が存在するとする。
これに対し subspace $H(E^{h-1})$ があり $\forall J$ に対し
E^{h-1} [illegible] が integral element となる。

特に $H(E^{h-1}) = E^h$ のとき V^{h-1} を含み
E^h を通る解が唯一つ存在する（第一定理）

一般化された第一定理
reg. int element E^p V^p
$H(E^p)$ が integral element の場合 即ち
極大 となっているとき （例えば包合系）

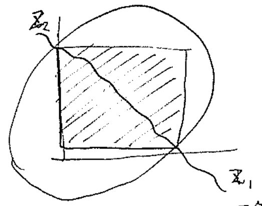
このときも 解 v^h が 一意的に存在する。
ひくい次元の初期条件で 高い次元の解がきまること
に注意。

Weil の「数学の将来」

Hartogs の正則包
elementary singularity は $n-1$ subvariety

Picard
2 変数 双曲型 2階準線形 方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} = F\left(z_1, z_2, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \frac{\partial w}{\partial z_2}\right)$$



接線<0. の曲線上の初期条件に対し
characteristic variety で囲まれる所まで
解が存在する。
elementary singularity は characteristic

$\tan z$, e^{e^z-1} ・ ~~sin~~ の中級数の収束域は
複素関数論的に考えたとき 一番明らか である。

一階偏微分方程式

$$\begin{cases} F(z_1, \ldots, z_n, w, p_1 \cdots) = 0 \\ dw - \sum p_i\, dz_i = 0 \end{cases}$$

今 $dF = 0$ $\sum dp_i\, dz_i = 0$.

$2n+1$. ∞^{2n} の characteristic でおはれる.
$n-1$ の初期条件で n 次元の解がきまる
lementary singularity はやはり characteristic
(Lagrange Charpit).

陰函数 逆函数 は 逐次近似で存在が証明されるが analytic function のときは Cauchy 積分公式から出せ これが最も簡単である.

$$f(w, t_1, \ldots, t_n) = z$$
$$\beta \ \gamma_1 \ldots \ \gamma_n \quad \alpha$$

$$\varphi(\alpha\ \gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \beta$$
$$\varphi(z, t_1, \ldots, t_n) = w$$

$$\varphi(z, t \cdots t_n) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{v f'(v\, t_1 \ldots t_n)}{f(v\, t, \ldots t_n) - z}\, dv$$

$F(z, w, t, \cdots t_n)$

$$F^* = \frac{1}{2\pi i}\oint^z \frac{f'(v, t_1, \ldots, t_n)}{f(v, t_1 \cdots t_n)}$$

常微分方程式
$$f\left(z, w, \frac{dw}{dz}\right) = 0.$$
$$F(z, w, p) \longrightarrow F^*(z)$$

依存域を決定する

§1. 線型方程式

定義

X paracompact complex manifold

$\mathcal{O}$ sheaf of holomorphic functions

$\mathcal{I}$ 〃 〃 germs of holomorphic differential operators.

$\mathcal{O}$: $\mathcal{I}$ left module

Def. 1 X 上の lin. eq. とは coherent ~~locally finitely generated~~ $\mathcal{I}$-left module $\mathcal{M}$

$$\to \mathcal{I}^{m}|_U \to \mathcal{I}^{n}|_U \to \mathcal{M}|_U \to 0.$$

普通には $\displaystyle\sum_{\beta} L_{\alpha\beta}\varphi_\beta = 0 \qquad (\alpha = , \quad \cdots\ )$

$L_{\alpha\beta} \in \Gamma(X, \mathcal{I})$

$L_{\alpha\beta}$ の $\mathcal{I}$ module としての構造が大切.

~~Def. 2~~. $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ のとき.

$\dfrac{\partial}{\partial z} = 0.$

$\varphi = \text{const}$ のみが解.

Def 2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ の元を solution という.

$\mathcal{H}om_{\mathcal{I}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ local solution の sheaf

$\|$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}^n, \mathcal{O}) = \mathcal{O}^n.$

ある category の意味で (differential sheaf のいみで)

$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow \mathcal{O}^{n_0} \longrightarrow \mathcal{O}^{n_1} \longrightarrow \cdots$

が exact となる.

($\mathcal{O}$ hom ではない)

$\mathfrak{h}$: differential sheaf

$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow \mathcal{O}^{n_0} \longrightarrow \mathcal{O}^{n_1}$

differential operator

$(f_1 \cdots f_{n_0}) \longrightarrow (\sum L_{\alpha\beta} f_\beta)_{\alpha=1,\dots,n_1}$

とかけること.

一点 p ならば stalk $\mathbb{C}$ の sheaf

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\mathfrak{M}_p, \mathbb{C}_p) = V_p$

(analytic vector fibre space)

これから $\mathfrak{M}_p$ に一意的にもどりうる.

方程式と解とは一対一の対応がある.

$\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}'$ hom とは

$0 \to \mathfrak{h} \to \mathcal{O}^{n_0} \to \mathcal{O}^{n_1}$

differential map.

$0 \to \mathfrak{h}' \to \mathcal{O}'^{n_0} \to \mathcal{O}'^{n_1}$

$\mathrm{Hom}^*(\mathfrak{h}, \Omega^n)$ $\mathfrak{h}$ の adjoint

$\mathrm{Ext}^{*n}(\mathfrak{h}, \Omega^n) = 0$ $(n \geq 1)$ のときは……

はず.

purely s codimensionality

$\mathrm{Ext}^{*n}(\mathfrak{h}, \Omega^n) = 0$ $(n \neq s)$

このときは理論が簡単化されるであろう.

$\mathrm{Ext}^{*n}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}^n) = 0$

$n = 0$ 優決定系

$n \geqq 0$ 劣決定系

$n \neq 1$ Cauchy type.

優決定系の場合も普通あらわれる方程式では $n \neq 5$ のときには消え. purely 5-dim'l となっている.
(5次元下った初期条件で解がきまると云)

§2.

Riemann 函数 — elementary solution

$\mathfrak{M}$ 方程式

$\mathfrak{F}$ solution.

どこまでのばせるか? 自然境界はどんなものか?

$$0 \to \mathfrak{F} \to \mathcal{O}^m \xrightarrow{D} \mathcal{O}^n$$

m 個の未知函数に関する n 連立方程式

$$z = (z_1, \ldots, z_\ell)$$

$$f(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z)).$$

$$f(z) = \int R(z, \zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta$$

Riemann function

ζ 初期条件

hyperfunction

超函数として

R ははじめの方程式 $D_z(R(z,\zeta)) = 0$ をみたすばかりでなく. $L_z(R(z,\zeta)) = 0$ という外の方程式を持つ. そうして非常に強い優決定系となることがある.

こういう超函数を analytic という。
特別の singularity 以外 即ち characteristic 以外ではなめらかな函数となる。であろう。
主係数と一階の場合にはたしかにそうなる。

§ 定数係数の線型方程式

$$\sum F_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)\varphi_\beta = 0$$

あるいは matrix でかいて

$$F\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)\varphi = 0$$

Riemann 函数は

$$F\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right) R(z, \zeta) = 0$$

の他に

$$\left[(z_\mu - \zeta_\mu)F_\nu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - (z_\nu - \zeta_\nu)F_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] R(z, \zeta) = 0$$

Complex で依存域がきまる。