
Zum Problem der Damen auf dem Torus

Konrad Schlude und Ernst Specker

Ernst Specker war von 1955 bis 1987 Professor für Mathematik an der ETH Zürich.

Konrad Schlude promovierte an der ETH Zürich.

1 Einleitung

Das 8-Damen-Problem hat eine lange Geschichte [2] und ist ein beliebtes Objekt, um Backtracking-Algorithmen zu illustrieren. Dabei geht es um die Frage, wie 8 Damen auf ein Schachbrett gestellt werden können, so dass sich keine zwei Damen gegenseitig bedrohen. Diese Frage kann verallgemeinert werden: Für welche Zahlen n können auf einem $n \times n$ Brett n sich nicht gegenseitig bedrohende Damen aufgestellt werden? Man prüft leicht nach, dass es für $n \in \{2, 3\}$ nicht geht; man kann zeigen, dass es für alle anderen Zahlen jedoch geht [1].

Dies ändert sich, wenn das Schachbrett durch Identifikation von gegenüberliegenden Rändern zu einem Schachtorus verklebt wird. Durch den Wegfall der Ränder werden die Wirkungsfelder der Damen vergrössert, da jede Dame zwei Diagonalen bedroht. Daher gibt es mehr Fälle, in denen keine n Damen platziert werden können. Abb. 1 zeigt die Auswirkungen am Beispiel $n = 4$. Während auf dem Schachbrett 4 Damen aufgestellt werden können, bedroht schon die erste Dame auf dem Schachtorus beinahe alle restlichen Felder (gestrichelte Linien), so dass nur noch eine weitere Dame aufgestellt werden kann, die die bisher noch nicht bedrohten Felder abdeckt. Zur Abkürzung schreiben wir n -Torus für einen (Schach-)Torus der Grösse $n \times n$.

Mittels Computersimulation kann man Tabelle 1 bestimmen. Für manche n können auf dem n -Torus n Damen platziert werden, für andere jedoch nur deren $n - 1$ oder $n - 2$.

G. Pólya zeigte 1918, dass genau dann n Damen auf dem Schachtorus der Grösse $n \times n$ aufgestellt werden können, wenn n zu 6 teilerfremd ist. Die Beweismethode geht auf L. Euler und A. Hurwitz zurück. In dieser Arbeit modifizieren die beiden Autoren diese Methode und untersuchen damit die Frage, wann $n - 1$ Damen aufgestellt werden können.

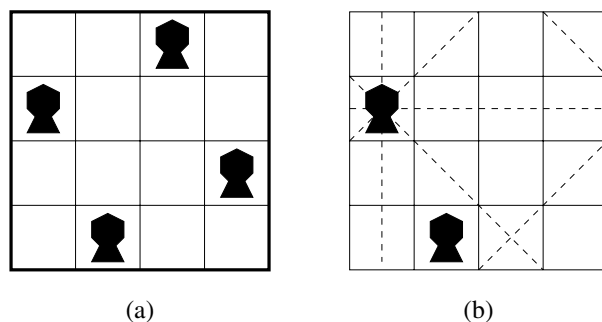


Abb. 1 Das Damenproblem auf einem Schachbrett (a) und einem Schachtorus (b) der Grösse 4×4

Grösse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Anzahl Damen	1	1	1	2	5	4	7	6	7	9	11	10	13	13

Tabelle 1 Maximale Anzahl von Damen auf dem n -Torus

Schon 1918 zeigte G. Pólya [4], dass genau dann n Damen aufgestellt werden können, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, d.h., wenn n zu 6 teilerfremd ist. Pólya führt seine Beweismethode auf L. Euler [3] und auf A. Hurwitz zurück. In dieser Arbeit wollen wir die Methode weiterentwickeln, um die Frage zu beantworten, wann $n - 1$ Damen aufgestellt werden können.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im nachfolgenden Kapitel 2 präsentieren wir das Ergebnis von Pólya. Kapitel 3 modifiziert die Beweismethode und untersucht die Frage, wann $n - 1$ Damen platziert werden können. In Kapitel 4 wird hingegen gezeigt, dass die Methode nicht alle Fälle erkennen kann, sie in einem gewissen Sinn unvollständig ist.

Nachfolgend benutzen wir die folgende Notation. Mit $a \equiv_n b$ bezeichnen wir $a \equiv b \pmod{n}$. Wir sagen, dass man eine Anzahl Damen *platzieren* kann, wenn die Damen so aufgestellt werden können, dass sie sich nicht bedrohen.

2 Die Methode von Euler, Hurwitz und Pólya

Auf einem n -Torus sind n Damen so aufzustellen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder verallgemeinerten Diagonale genau eine Dame steht (oder auch: dass auf keiner dieser Reihen 2 Damen stehen).

Die Felder des Schachbrettes seien kodiert durch (i, j) (mit $0 \leq i, j \leq n - 1$) wie die Zeilen und Spalten einer Matrix. In Abb. 2 hat die linke obere Ecke die Koordinaten $(0, 0)$, die rechte untere Ecke die Koordinaten $(n - 1, n - 1)$.

Eine zulässige Stellung bestimmt dann eine Permutation p von $(0, \dots, n - 1)$, womit Zeilen- und Spaltenbedingungen erfüllt sind. Steht eine Dame auf Feld $(i, p(i))$, so bedroht sie auch die Felder $(i + k, p(i) + k)$ und $(i + k, p(i) - k)$ für beliebige k (jeweils mod n gerechnet). Für $j \neq i$ folgt daraus, dass

$$j - i \not\equiv_n p(j) - p(i) \quad \text{und} \quad j - i \not\equiv_n p(i) - p(j)$$

sein muss. Umformuliert ergibt das für $j \neq i$:

$$p(i) - i \not\equiv_n p(j) - j \quad \text{und} \quad p(j) + j \not\equiv_n p(i) + i.$$

Dies bedeutet, dass $p - \text{id} \pmod n$ und $p + \text{id} \pmod n$ Permutationen sind (mit id bezeichnen wir die Identität).

Die Frage, ob n Damen auf einem n -Torus platziert werden können, ist somit äquivalent dem folgenden Problem: Für welche n gibt es eine Permutation $p : (0, \dots, n - 1) \rightarrow (0, \dots, n - 1)$, so dass $p + \text{id}$ und $p - \text{id}$ Permutationen sind? Die Frage nach der Existenz wird entschieden, indem die Abbildungen $p + \text{id}$ und $p - \text{id}$ als Permutationen und als Summe von zwei Permutationen betrachtet werden.

Theorem 1 (Pólya). *Es gibt solche Permutationen genau dann, wenn n und 6 teilerfremd sind.*

Beweis. (1) Zunächst zeigen wir, dass n Damen aufgestellt werden können. Sind n und 6 teilerfremd, so sind auch 1, 2, 3 und n je teilerfremd. p sei die Abbildung, welche i ($i = 0, \dots, n - 1$) abbildet in $2i \pmod n$. Es sind dann die Abbildungen $p, p + \text{id}, p - \text{id}$ Abbildungen, welche i abbilden in ki ($k = 2, 3, 1$); solche Abbildungen sind Permutationen. Abb. 2 zeigt ein Beispiel für $n = 5$.

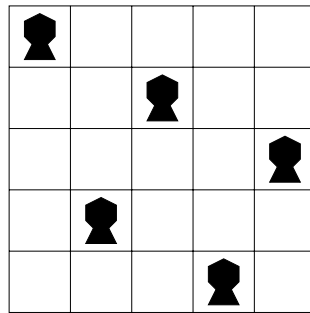


Abb. 2 Platzierung der Damen für $n = 5$

(2) Gibt es eine Permutation p von $(0, \dots, n - 1)$ in sich, so dass $p + \text{id}$ eine Permutation ist, so ist n ungerade.

Beweis (Euler). Wir betrachten $p + \text{id}$ als Permutation. Dann erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i) \equiv_n \sum_{i=0}^{n-1} i \equiv_n \frac{n(n-1)}{2} \equiv_n \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade,} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Betrachten wir $p + \text{id}$ hingegen als Summe von zwei Permutationen, so folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i) \equiv_n 2 \sum_{i=0}^{n-1} i \equiv_n n(n-1) \equiv_n 0.$$

(3) Gibt es eine Permutation p von $(0, \dots, n-1)$ in sich, so dass $p + \text{id}$ und $p - \text{id}$ Permutationen sind, so ist n nicht durch 3 teilbar.

Beweis (Hurwitz). Analog zu Teil (2) betrachten wir $p + \text{id}$ und $p - \text{id}$ als Permutation und als Summe von zwei Permutationen. Einerseits ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (p(i) - i)^2 \equiv_n 2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

und andererseits

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (p(i) - i)^2 \equiv_n \sum_{i=0}^{n-1} 2p(i)^2 + 2i^2 \equiv_n 4 \sum_{i=0}^{n-1} i^2.$$

Dies führt zur Bedingung

$$0 \equiv_n 2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \equiv_n \frac{n}{3}(2n^2 - 3n + 1).$$

Ist n durch 3 teilbar, so ist der Ausdruck $(2n^2 - 3n + 1)$ nicht durch 3 teilbar; damit ist die Bedingung nicht erfüllbar. \square

3 Platzierung von $n - 1$ Damen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Frage, wann $n - 1$ Damen platziert werden können. Zunächst zeigen wir, dass das in bestimmten Fällen möglich ist.

Theorem 2. *Sei n gerade, aber weder durch 3 noch durch 4 teilbar. Dann können $n - 1$ Damen platziert werden.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung, indem wir eine Platzierungsfunktion p angeben, mit der $n - 1$ Damen platziert werden. Als Platzierungsfunktion wählen wir die folgende Funktion:

$$p(i) := \begin{cases} 3i \bmod n, & \text{wenn } 0 \leq i < \frac{n}{2}, \\ 3i + 3 \bmod n, & \text{wenn } \frac{n}{2} \leq i < n - 1. \end{cases}$$

Die Dame i hat die Koordinaten $(i, p(i))$. Wir haben zu zeigen, dass für $i \neq j$ die folgenden Ungleichungen gelten:

- $p(j) - p(i) \not\equiv_n 0$,
- $p(j) + j - p(i) - i \not\equiv_n 0$,
- $p(j) - j - p(i) + i \not\equiv_n 0$.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $i < j$ gilt. Wir betrachten die folgenden Fälle.

Fall 1: Sei $0 \leq i < j < \frac{n}{2}$. Für die Differenz ergibt sich $j - i \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 3j - 3i &= 3(j - i) \not\equiv_n 0, \text{ da } 3 \nmid n, \\ 4j - 4i &= 4(j - i) \not\equiv_n 0, \text{ da } 4 \nmid n, \\ 2j - 2i &= 2(j - i) \not\equiv_n 0, \text{ da } (j - i) < \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Fall 2: Sei $0 \leq i < \frac{n}{2} \leq j < n - 1$. Dann ist $j - i \in \{1, \dots, n - 2\}$ und folglich

$$\begin{aligned} 3j + 3 - 3i &= 3 \underbrace{(j - i + 1)}_{\in \{2, \dots, n-1\}} \not\equiv_n 0, \text{ da } 3 \nmid n, \\ 4j + 3 - 4i &= 4 \underbrace{(j - i + 1) - 1}_{\text{ungerade}} \not\equiv_n 0, \text{ da } n \text{ gerade,} \\ 2j + 3 - 2i &= 2 \underbrace{(j - i + 1) - 1}_{\text{ungerade}} \not\equiv_n 0, \text{ da } n \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Der Fall $\frac{n}{2} \leq i < j < n - 1$ ist analog zu Fall 1. □

Nun untersuchen wir die Frage, ob die Platzierung von $n - 1$ Damen auch in anderen Fällen gelingt. Das folgende Theorem gibt eine erste Antwort.

Theorem 3. *Ist n durch 3 teilbar, so können keine $n - 1$ Damen platziert werden.*

Beweis. Gegeben sei ein n -Torus, auf dem $n - 1$ sich gegenseitig nicht bedrohende Damen platziert sind. O.E. kann angenommen werden, dass in Zeile 0 und Spalte 0 keine Dame steht. Für $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ habe die Dame i die Position $(i, p(i))$, wobei $p : \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{1, \dots, n - 1\}$ eine Permutation ist.

Die Funktionen $p + \text{id}, p - \text{id} : \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{0, \dots, n - 1\}$ sind injektive Abbildungen und nehmen jeweils einen Wert nicht an. Sei p^+ der Wert, den $p + \text{id}$ nicht annimmt; sei p^- der Wert, den $p - \text{id}$ nicht annimmt. Nachfolgend unterscheiden wir 2 Fälle.

Fall 1: n ist ungerade. Wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &\equiv_n n(n - 1) = \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i) \equiv_n n \frac{n - 1}{2} - p^+ \equiv_n -p^+, \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i) \equiv_n n \frac{n - 1}{2} - p^- \equiv_n -p^- \end{aligned}$$

folgt $p^+ = p^- = 0$. Analog zu Theorem 1 führt das zur Bedingung $0 \equiv_n \frac{n}{3}(2n^2 - 3n + 1)$. Ist n durch 3 teilbar, so kann diese Bedingung nicht erfüllt werden. Somit ist es unmöglich, $n - 1$ Damen zu platzieren, wenn $3 \mid n$ und n ungerade ist.

Fall 2: n ist gerade. Die Gleichungen

$$0 \equiv_n n(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i) \equiv_n \frac{n}{2}(n-1) - p^+,$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i) \equiv_n \frac{n}{2}(n-1) - p^-$$

führen zu $p^+ = p^- = \frac{n}{2}$. Die Betrachtung der Summe der Quadrate liefert nun einerseits

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^2 \equiv_n 2 \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 2 \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

und andererseits

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} 2p(i)^2 + 2i^2 = 4 \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Dies führt weiter zur Bedingung $0 \equiv_n 2 \frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1) + \frac{n^2}{2} = \frac{n}{6}(4n^2 - 3n + 2)$. Nach Voraussetzung ist n gerade; falls $3 \mid n$, dann auch $6 \mid n$. Für $6 \nmid n$ gilt jedoch $4n^2 - 3n + 2 \equiv_n 2 \pmod{6}$, und die Bedingung ist nicht erfüllbar. Wenn n gerade ist und $3 \nmid n$, dann können nicht $n - 1$ Damen platziert werden. \square

Nachfolgend wird die Zahl n als gerade angenommen. Wir erinnern an die Formel

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n}{2} \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{3} \right).$$

Für gerades n ist der Term $2n^2 - 3n + 1$ ungerade; ist n ferner nicht durch 3 teilbar, so ist $n^2 \equiv_3 1$ und folglich $2n^2 - 3n + 1$ durch 3 teilbar. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \equiv_n \frac{n}{2} \quad \text{für } 2 \mid n, 3 \nmid n.$$

Für die Summe der dritten Potenzen gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{n^2}{4} (n^2 - 2n + 1).$$

Wieder gilt, dass der Term $n^2 - 2n + 1$ ungerade ist, folglich

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \equiv_n \frac{n^2}{4} \equiv_n \begin{cases} 0, & \text{wenn } 4 \mid n, \\ \frac{n}{2}, & \text{wenn } 4 \nmid n. \end{cases}$$

Theorem 4. *Ist n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar, so können keine $n - 1$ Damen platziert werden.*

Beweis. Sei n durch 4 teilbar. Nach Theorem 3 gilt die Aussage, wenn n durch 3 teilbar ist. Daher muss die Aussage nur für nicht durch 3 teilbare n gezeigt werden. Sei n eine Zahl, so dass auf dem n -Torus $n - 1$ Damen platziert werden können. Wieder gehen wir davon aus, dass in der ersten Spalte und in der ersten Zeile keine Dame steht. Folglich gibt es eine Permutation $p : \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{1, \dots, n - 1\}$ mit der Eigenschaft, dass $p + \text{id}$, $p - \text{id} : \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow \{0, \dots, n - 1\} \setminus \{n/2\}$ bijektive Abbildungen sind. Daher gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^3 \equiv_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}_{\equiv_n 0} - \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)^3}_{\equiv_n 0} \equiv_n 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^3 = \sum_{i=1}^{n-1} p(i)^3 - 3p(i)^2i + 3p(i)i^2 - i^3 \equiv_n 3 \sum_{i=1}^{n-1} p(i)i^2 - p(i)^2i.$$

Da n nicht durch 3 teilbar ist, folgt daraus

$$0 \equiv_n \sum_{i=1}^{n-1} p(i)i^2 - p(i)^2i.$$

Analog erhält man für $p + \text{id}$ die Formeln

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^3 \equiv_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}_{\equiv_n 0} + \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)^3}_{\equiv_n 0} \equiv_n 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^3 = \sum_{i=1}^{n-1} p(i)^3 + 3p(i)^2i + 3p(i)i^2 + i^3 \equiv_n 3 \sum_{i=1}^{n-1} p(i)i^2 + p(i)^2i.$$

Da n nicht durch 3 teilbar ist, erhalten wir aus diesem und dem vorangehenden Resultat das folgende:

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(i)^2i \equiv_n 0 \quad \text{oder} \quad \frac{n}{2}.$$

In beiden Fällen ist die Summe gerade. Für jeden einzelnen Summanden $p(i)^2i$ gilt, dass $p(i)^2i$ genau dann gerade ist, wenn $p(i)i$ gerade ist. Daher muss auch die Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i$$

gerade sein. Betrachten wir nun nochmals die Summe der Quadrate. Man hat einerseits

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} i^2}_{\equiv_n \frac{n}{2}} - \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)^2}_{\equiv_n 0} \equiv_n \frac{n}{2}$$

und andererseits

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} 2i^2 + 2p(i)i \equiv_n 2 \sum_{i=1}^{n-1} p(i)i.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i \equiv_n \frac{n}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{4}n.$$

Ist n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar, so ist $\frac{n}{4}$ ungerade. Folglich können in diesem Fall keine $n - 1$ Damen platziert werden. \square

4 Grenzen der Methode

Für die vorangehenden Resultate wurden Summen von Potenzen betrachtet. Um die Resultate im Fall $3 \mid n$ zu zeigen, verwendeten wir Summen von Quadratzahlen, für den Beweis von Theorem 4 waren es Summen von Kubikzahlen. Letzteres geschah nicht zufällig. Betrachten wir zur Erläuterung die Permutation p in Tabelle 2. Die Funktion $p + \text{id}$ erfüllt die Bedingung einer Permutation, $p - \text{id}$ jedoch nicht. Die Spalte Σ bezeichnet die Summe

i	1	2	3	
p	3	1	2	Σ
$p + \text{id}$	0	3	1	0
$p - \text{id}$	2	3	3	0
$(p + \text{id})^2$	0	1	1	2
$(p - \text{id})^2$	0	1	1	2
$(p + \text{id})^3$	0	3	1	0
$(p - \text{id})^3$	0	3	3	2

Tabelle 2 Permutation für $n = 4$

mod n . Erst bei der dritten Potenz zeigt sich der Unterschied in der Summe, weshalb im Beweis von Theorem 4 die dritte Potenz verwendet werden musste. Auf der anderen Seite konnte damit nicht gezeigt werden, dass im Fall $n = 8$ maximal 6 Damen platziert werden können. Auch das ist kein Zufall, wie das Beispiel in Tabelle 3 zeigt. Wieder gilt, dass $p + \text{id}$ die gewünschte Bedingung einer Permutation erfüllt, $p - \text{id}$ jedoch nicht. Auf der

i	1	2	3	4	5	6	7
p	6	7	2	4	1	5	3
$p + \text{id}$	7	1	5	0	6	3	2
$p - \text{id}$	5	5	7	0	4	7	4

Tabelle 3 Permutation für $n = 8$

anderen Seite gilt jedoch

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^k \equiv_n \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^k \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Dies zeigt, dass die Methode in diesem Fall nicht angewendet werden kann; die Grenzen dieser Methode sind anscheinend erreicht.

5 Zusammenfassung

Mittels der Methode von Euler, Hurwitz und Pólya erhält man einen eleganten Beweis dafür, dass genau dann n Damen auf dem n -Torus platziert werden können, wenn n zu 6 teilerfremd ist. Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, dass eine erweiterte Methode auch auf die Frage angewandt werden kann, ob $n - 1$ Damen auf dem n -Torus platziert werden können. In diesem Fall sind die Funktionen $p + \text{id}$ und $p - \text{id}$ zwar nicht unbedingt Permutationen, aber sie besitzen eine ähnliche Struktur, die im Beweis ausgenutzt wurde.

Es wurde ferner gezeigt, dass die Methode in einem gewissen Sinn unvollständig ist: Im Fall $n = 8$ kann die Methode nicht erkennen, dass keine 7 Damen platziert werden können.

Eine offene Frage ist, ob immer $n - 2$ Damen platziert werden können.

Literatur

- [1] Ahrens, W.: *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Teubner, Leipzig 1918.
- [2] Campbell, P.J.: Gauss and the Eight Queens Problem. A Study in Miniature of the Propagation. *Historia Math.* 4 (1977), 397–404.
- [3] Euler, L.: *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*. Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes. Opera Omnia I.7, 1923, 291–392.
- [4] Pólya, G.: *Über die „doppelt-periodischen“ Lösungen des n -Damen-Problems*. In: [1], 364–374. Nachgedruckt in: Pólya, G.: *Collected works*. Vol. V, 237–247.

Ernst Specker
 Konrad Schlude
 Departement Mathematik
 ETH-Zürich
 8092 Zürich, Schweiz
 e-mail: konrad@schlu.de