

Oscillation, spiralement, tourbillonnement

F. Cano, R. Moussu and F. Sanz

À René Thom

Résumé. La dynamique oscillante d'un champ de vecteurs analytique en dimension trois s'organise autour d'un nombre fini d'axes de tourbillonnement lorsqu'elle ne se délocalise pas par des éclatements de point.

Abstract. The oscillating dynamics of an analytic vector field in dimension three is organized around a finite number of twister axis when it is localisable by point blowing-ups.

Mathematics Subject Classification (2000). 34Cxxm, 32B20.

Introduction

Soit X un champ vecteurs analytique sur une variété M et soit $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe intégrale de X dont l'ensemble ω -limite $\omega(\gamma)$ est un point singulier p de X . Dans ce travail nous étudions la question suivante: comment, d'un point de vue analytique, γ peut-elle tendre vers p ? C'est une question classique déjà étudiée à la fin du 19^{ème} siècle par Poincaré [Po] et Lyapunov [Ly]. En dimension 2, leurs travaux apportent une réponse satisfaisante à cette question: γ possède une tangente en p ou γ spirale autour de p et alors p est un foyer monodromique. Pour décrire le comportement analytique de γ en dimension ≥ 2 nous utiliserons les concepts d'oscillation, de tangentes itérées et de spiralement axial en dimension 3. Donnons brièvement leur définition.

La courbe $\gamma : [0, \infty[\rightarrow M$ est *non oscillante* si toute hypersurface analytique qui ne la contient pas la coupe un nombre fini de fois seulement. Soit $\pi_1 : M_1 \rightarrow M$ l'éclatement de M de centre p . La courbe γ possède (par définition) une tangente en p si son relevé $\gamma_1 = \pi_1^{-1} \circ \gamma$ possède un unique point ω -limite $p_1 = \omega(\gamma_1)$. S'il existe une suite d'éclatements

$$M = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centres respectifs $p = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, \dots$ tels que, pour tout n , le relevé $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$ possède un unique point ω -limite $p_n = \omega(\gamma_n)$. On dit alors que γ possède des tangentes itérées en p et on écrit $TI(\gamma) = \{p_n\}$. On voit que si γ est

non oscillante alors $TI(\gamma)$ existe. La réciproque est vraie en dimension 2. Cette dichotomie osciller-tangentes itérées est propre à la dimension 2. En dimension 3, il faut la remplacer par le *spiralemment axial* comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1. *Si $TI(\gamma)$ existe et si γ est oscillante alors γ spirale autour d'un axe analytique Γ invariant par X .*

La définition générale du spiralemment axial étant un peu technique (voir 1.4), nous allons seulement en donner une propriété caractéristique lorsque Γ est lisse: γ spirale autour de Γ lisse s'il existe des coordonnées analytiques (x, y, z) en p telles que $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$ et telles que si $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ spirale autour de 0 dans le plan réel et $\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t))z(t)^{-n} = 0$ pour tout n . L'hypothèse Γ lisse n'est pas essentielle. En effet par une suite finie d'éclatements ponctuels on se ramène à ce cas.

Nous dirons qu'une demi-courbe analytique (ouverte) Γ est un axe de tourbillonnement de X s'il existe un voisinage semi analytique V de Γ , positivement invariant par X tel que Γ soit un axe de spiralement pour toute courbe intégrale de X issue d'un point de V . Il est dit non dégénéré si Γ n'est pas contenu dans l'ensemble $\text{Sing } X$ des points fixes de X . Ce concept doit être rapproché de celui de foyer monodromique en dimension 2 comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2. *Un axe de spiralement non dégénéré Γ pour γ est un axe de tourbillonnement de X .*

Ces axes sont des "centres organisateurs" de la dynamique de X au sens de R. Thom. Ils possèdent la propriété de finitude que l'on exige en général de tels objets.

Corollaire. *Tout point p de M possède un voisinage qui ne contient qu'un nombre fini d'axes de tourbillonnement non dégénérés.*

La motivation initiale de ce travail était l'étude de la dynamique d'un champ de gradient, $X = \nabla f$, où f est une fonction analytique. S. Lojasiewicz a montré [Lo₁] qu'une courbe intégrale γ de ∇f a au plus un point ω -limite $\omega(\gamma) = p$ et R. Thom [Th₁] a proposé la *conjecture du gradient*: γ possède une tangente en p . Cette conjecture¹ est vraie en dimension 2 et dans certains cas en dimension plus grande [Hu]. On peut aussi proposer la *conjecture forte du gradient*: γ n'est pas oscillante. Cette conjecture est encore vraie en dimension 2. Elle l'est aussi en dimension 3 lorsque la hessienne de f en p n'est pas nulle [Sa]. De plus, on peut montrer qu'un champ de gradient ne possède pas d'axe de tourbillonnement non dégénéré lisse [Fo-Sa]. Signalons enfin que dans un travail récent [Br], M. Brunella montre que tout champ de vecteurs analytique en dimension trois, à singularité

¹ Récemment K. Kurdyka, T. Mostowski et A. Parusiński ont prouvé cette conjecture.

isolée, possède une courbe intégrale ayant la propriété des tangentes itérées. Ainsi, les deux théorèmes précédents s'appliquent à ces champs de vecteurs.

Ce travail comporte deux parties. Dans la première partie, on étudie tout d'abord les relations entre les concepts oscillation, tangentes itérées et spiralement pour une courbe analytique quelconque $\gamma : [0, \infty[\rightarrow M$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = p$. Ensuite on précise ces résultats lorsque γ est une courbe intégrale et on prouve le théorème 1. La deuxième partie est essentiellement consacrée à la preuve du théorème 2 et de son corollaire.

Les trois auteurs remercient vivement la C.E.E. pour le support financier qu'elle leur a apporté pendant la préparation de ce travail, par l'intermédiaire du réseau T.M.R..

I. Tangentes itérées, oscillation, spiralement

Dans tout ce chapitre M désigne une variété analytique (non singulière) de dimension m et γ désigne une application analytique non constante de \mathbb{R}^+ dans M qui possède un unique point ω -limite $p = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$. Pour décrire le comportement analytique de $|\gamma|$, l'image de γ , au voisinage de p nous utilisons quatre concepts: tangentes itérées, contact plat, oscillation et spiralement. Dans la partie 1 de ce chapitre, nous étudions les relations qui les lient dans le cas général et dans la partie 2 nous précisons ces résultats lorsque γ est une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique réel.

1. Courbes paramétrées

Les définitions que nous allons donner dans ce paragraphe reposent sur les éclatements ponctuels et sur quelques propriétés classiques des ensembles semi-analytiques que l'on peut trouver dans [Hi₁], [Lo₂].

1.1. Eclatement ponctuel et tangentes itérées. Précisons tout d'abord quelques notations et définitions. Une *carte affine* centrée en un point p de M est un difféomorphisme analytique $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ d'un voisinage U de p sur \mathbb{R}^m tel que $x(p) = 0$ (on dit "affine" pour rappeler que l'image de la carte est \mathbb{R}^m , quoique les changements de cartes ne seront pas linéaires). Un *diviseur à croisements normaux* E de M est une union finie d'hypersurfaces analytiques lisses vérifiant: en tout point p de M , il existe une carte affine centrée en p et un entier $\nu \geq 0$ telle que $E \cap U = \{x_1 x_2 \cdots x_\nu = 0\}$. Une *orientation* de M en p adaptée à E est le (choix du) germe M^+ en p d'une composante connexe de $U \setminus E$. Rappelons que l'*éclatement de centre* p de M est un morphisme analytique, surjectif, propre $\pi : M_1 \rightarrow M$ dont la restriction à $M \setminus \pi^{-1}\{p\}$ est un isomorphisme sur $M \setminus \{p\}$ possédant la propriété suivante. En tout point p_1 de $\pi^{-1}(p)$ il existe une carte

affine $((x, z), U_1)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ centrée en p_1 et une carte affine centrée en p telles que

$$\pi(x, z) = (zx, z), \quad U_1 \cap \pi^{-1}(p) = \{z = 0\}.$$

Notons que la restriction de π à $U_1 \cong \mathbb{R}^m$ est un morphisme algébrique sur $U \cong \mathbb{R}^m$ et que le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(p)$ peut être identifié à l'espace projectif $\mathbb{R}P(m-1)$. Si E est un diviseur à croisements normaux de M , $E_1 = \pi^{-1}(E \cup \{p\})$ est un diviseur à croisements normaux de M_1 . Une orientation M_1^+ de M_1 en un point p_1 de E_1 adaptée à E_1 est dite *compatible avec une orientation* M^+ de M en p adaptée à E si $\pi(M_1^+) \subseteq M^+$.

Soit $\gamma : \mathbb{R}^+ = [0, \infty[\rightarrow M \setminus E \cup \{p\}$ une application analytique dont l'ensemble ω -limite est le point p , c'est-à-dire:

$$p = \omega(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma((t, \infty))}.$$

Soit $\gamma_1 = \pi^{-1} \circ \gamma$ le *relevé de γ par π* l'éclatement de centre p , i.e $\pi(\gamma_1(t)) = \gamma(t)$ pour $t \geq 0$. Si γ_1 possède un seul point ω -limite $p_1 = \omega(\gamma_1)$ on dit (naturellement) que γ possède une *tangente en p* et que $p_1 \in \mathbb{R}P(m-1)$ est la (direction de la) tangente à γ en p . Posons $M_0 = M$, $p_0 = p$, $E_0 = \emptyset$, $\pi_1 = \pi$.

Définition. On dit que γ a (la propriété) des *tangentes itérées* s'il existe une suite:

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \longleftarrow \dots M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \longleftarrow \dots$$

d'éclatements π_n de centres p_{n-1} telle que le relevé $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$ possède un unique point ω -limite $p_n = \omega(\gamma_n)$. La suite $TI(\gamma) = \{p_n\}$ est la suite des points infiniment proches de $\gamma = \gamma_0$. Notons, pour $n \geq 1$, $E_n = \pi_n^{-1}(E_{n-1} \cup \{p_{n-1}\})$ et M_n^+ l'orientation de M_n adaptée à E_n telle que M_n^+ contient le germe de $|\gamma_n|$ en p_n . La suite $TI^+(\gamma) = \{(p_n, M_n^+)\}$ est la suite orientée des points infiniment proches de γ . (Notons que lorsque $p \notin |\gamma| = \text{image de } \gamma$ et que $\omega(\gamma) = \{p\}$, alors le germe en p de $|\gamma|$ coïncide avec "l'image du germe" en $t = \infty$ de γ).

1.2. Oscillation. Dans tout ce paragraphe γ désigne encore une application analytique de \mathbb{R}^+ dans $M \setminus \{p\}$ telle que $\omega(\gamma) = p$.

Définition. Soit H une hypersurface semi-analytique de M . On dit que γ est *oscillante en p par rapport à H* si $|\gamma|$ n'est pas contenu dans H et si $|\gamma| \cap H$ est un ensemble infini. S'il n'existe pas une telle hypersurface nous dirons que $|\gamma|$ est *non oscillante en p* .

Ce concept d'oscillation d'une courbe est étudié quantitativement dans le cadre global par D. Novikov et S. Yakovenko dans [No-Ya].

Proposition. Si $|\gamma|$ est non oscillante en p , elle possède la propriété des tangentes itérées en p .

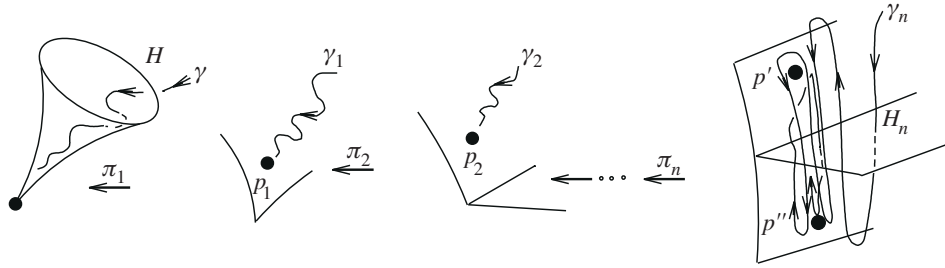


Figure 0.

La proposition réciproque n'est pas vraie en général. Par exemple la courbe $t \mapsto (1/t, \exp(-t)\sin t)$ possède des tangentes itérées en $(0, 0)$ et est oscillante par rapport à la droite $y = 0$. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous étudierons cette réciproque lorsque γ est une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique.

Preuve. Nous allons montrer la proposition contraposée. Posons $M_0 = M, p_0 = p, \gamma_0 = \gamma$ et supposons qu'il existe une suite d'éclatements $\pi_k: M_k \rightarrow M_{k-1}$ pour $k = 1, 2, \dots, n$ de centres p_{k-1} , telle que, pour $k = 1, 2, \dots, n - 1$, le relevé $\gamma_k = \pi_k^{-1} \circ \gamma_{k-1}$ de γ_{k-1} possède un unique point ω -limite $p_k = \omega(\gamma_k)$ et telle que $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$ possède au moins deux points ω -limites distincts p'_n, p''_n . Puisqu'il s'agit de prouver un résultat local nous pouvons supposer que $M_0 = \mathbb{R}^m$ et que les deux points p'_n, p''_n sont contenus dans une même carte affine $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n \circ x^{-1}$ soit une application polynomiale. D'après le théorème de Tarski-Seidenberg [Ta] sur les projections d'ensembles semi-algébriques, il suffit de construire une hypersurface algébrique H_n dans $U \cong \mathbb{R}^m$ non contenue dans le diviseur telle que $\# H_n \cap |\gamma_n| = \infty$ et $|\gamma_n| \not\subset H_n$. En effet, sa projection par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n \circ x^{-1}$ sera une hypersurface semi-algébrique H telle que $\# H \cap \gamma = \infty$ et $|\gamma| \not\subset H$. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, z)$ des coordonnées affines sur U telles que:

$$\{z = 0\} = \pi_n^{-1}(p_{n-1}) \quad \text{et} \quad p'_n, p''_n \in B = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 + z^2 < 1\}.$$

Si $|\gamma_n|$ coupe une infinité de fois la sphère ∂B on prend $H_n = \partial B$. Si ce n'est pas le cas, soit H_n un hyperplan $f(x_1, \dots, x_{m-1}, z) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \beta = 0$ tel que $f(p'_n) \cdot f(p''_n) < 0$. Les points p'_n, p''_n appartenant à deux composantes connexes distinctes de $B \setminus H_n$, $|\gamma|$ coupe une infinité de fois leur "frontière commune" $B \cap H_n$. \square

Remarque. Le concept "osciller" est stable par éclatement. Si γ est oscillante par rapport à H , alors $\pi^{-1} \circ \gamma = \gamma_1$ est oscillante par rapport à $\pi^{-1}(H) = H_1$. Par contre, il ne l'est pas, à priori, par effondrement puisque l'image directe

par éclatement ponctuel d'une hypersurface analytique n'est pas en général semi-analytique [Lo₂], [Hi₁]. Dans la preuve précédente, on contourne cette difficulté en travaillant dans des cartes affines pour se placer dans le cadre algébrique. Nous aurions pu faire une théorie semblable dans le cadre sous-analytique. Les deux théories ne sont pas équivalentes. Il nous semble qu'elles coïncident lorsqu'il s'agit de trajectoires de champs de vecteurs (mais nous ne l'avons pas démontré).

1.3. Contact plat avec une demi-branche analytique. Soit c une application analytique non constante de \mathbb{R} dans M et soit E un diviseur à croisements normaux. Le germe Γ de $c(]0, \varepsilon[)$, $\varepsilon > 0$, en $p = c(0)$ est appelé une *demi-branche analytique en p* . Elle est dite *adaptée à E* si $\Gamma \cap E = \emptyset$. On dit que Γ est *lisse relativement à E* s'il existe une carte affine $((x_1, \dots, x_{m-1}, z), U)$ centrée en p telle que

$$\Gamma = \{x_1 = x_2 = \dots = x_{m-1} = 0, z > 0\} \text{ et } E \cap U = \{z = 0\}.$$

Soit $\pi_1 : M_1 \rightarrow M = M_0$ l'éclatement de centre $p = p_0$. On sait que c possède un unique relèvement c_1 par π , $c(s) = \pi \circ c_1(s)$. La contre-image $\Gamma_1 = \pi_1^{-1}(\Gamma_0)$, avec $\Gamma_0 = \Gamma$, est la demi-branche analytique en $p_1 = c_1(0)$ adaptée à $E_1 = \pi^{-1}(E \cup \{p\})$ qui est le germe de $c_1(]0, \varepsilon[)$ en p_1 . En itérant cette construction, on obtient une suite d'éclatements:

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centre des points p_{n-1} et une suite de demi-branches analytiques Γ_n , $n \geq 0$, aux points p_n adaptées aux diviseurs $E_n = \pi_n^{-1}(E_{n-1})$. La suite $\{p_n\}$, $n \geq 1$ est la suite des points infiniment proches au sens de 1.1 de la courbe $\sigma: t \mapsto c(1/t)$, $t > 0$ et nous écrirons:

$$TI(\Gamma) = TI(\sigma) = \{p_n\} \text{ et } TI^+(\Gamma) = TI^+(\sigma) = \{(p_n, M_n^+)\}.$$

Rappelons ([Lo₂], [Hi₁]) les propriétés suivantes des demi-branches analytiques qui sont bien connues:

- i) Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, Γ_n soit lisse relativement à E_n .
- ii) Si Γ' est une demi-branche analytique telle que $TI^+(\Gamma') = TI^+(\Gamma)$ alors $\Gamma' \equiv \Gamma$.
- iii) Soit A un sous-ensemble semi-analytique de M . Alors Γ est contenu dans \overline{A} si et seulement si p_n appartient à l'adhérence de $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n)^{-1}(A) \cap M_n^+$ pour tout $n \geq 0$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, γ désigne une application analytique de \mathbb{R}^+ dans $M \setminus \{p\}$ telle que $\omega(\gamma) = p$.

Définition. Soit Γ une demi-branche analytique en p . On dit que γ a un contact plat avec Γ si γ a la propriété des tangentes itérées et si $TI^+(\gamma) = TI^+(\Gamma)$.

Par définition, ce concept est stable par éclatement et par effondrement.

Proposition (propriété caractéristique). Soit Γ une demi-branche analytique lisse en p adaptée à E , i.e. $\Gamma = \{x_1 = \dots = x_{m-1} = 0, z > 0\}$, $E \cap U = \{z = 0\}$ dans une carte affine U centrée en p . Alors γ a un contact plat avec Γ si et seulement si on a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad z(t) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x(t)\|}{z(t)^n} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 0,$$

en écrivant $\gamma(t) = (x(t), z(t))$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2$.

L'existence des tangentes itérées n'implique pas le contact plat comme le montre l'exemple $\gamma : t \rightarrow (t^{-1}, t^{-\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$. En effet $TI(\gamma)$ contient un nombre infini de "coins" du diviseur déterminés par le développement en fraction continue de λ .

Preuve. Soit $TI(\Gamma) = \{p_n\}$ la suite de points infiniment proches de Γ et soit $\{\pi_n\}$ la suite d'éclatements de centre les points p_{n-1} . Il existe une carte affine en p_n , $((u, z), U_n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$ telle que:

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n(u, z) = (z^n u, z).$$

Soit $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$ le relevé de $\gamma = \gamma_0$ par cette composition d'éclatements. En écrivant $\gamma_n(t) = (u(t), z(t))$ la proposition est une conséquence immédiate des définitions et de l'égalité $x(t) = z(t)^n u(t)$. \square

1.4. Spiralemment. Le concept de "spiraler autour de..." en dimension 2 et 3 fait partie du langage courant, nous allons le préciser. Dans tout ce paragraphe γ est, comme dans les paragraphes précédents, une application analytique de \mathbb{R}^+ dans $M \setminus \{p\}$ telle que $\omega(\gamma) = p$. Nous dirons qu'une hypersurface semi-analytique T est *transversalement orientée* par γ si T est connexe, lisse, orientable et si γ coupe transversalement T une infinité de fois toujours dans le même sens pour t assez grand. C'est-à-dire que T possède un voisinage ouvert connexe U dans M tel que $U \setminus T$ a deux composantes connexes U^+ , U^- et tel que pour t assez grand et $\gamma(t) \in T$ on a $\gamma(t + \varepsilon_t) \in U^+$ et $\gamma(t - \varepsilon_t) \in U^-$ pour $\varepsilon_t > 0$ assez petit.

Spiralemment en dimension 2. Si $m = \dim M = 2$ on dit que γ spirale autour de $\{p\}$ si toute demi-branche analytique T en p est transversalement orientée par γ (figure 1).

Soit (x_1, x_2) une carte affine centrée en p et soient (r, θ) les coordonnées polaires correspondantes. Si γ spirale autour de p , l'angle $\theta(t) = \int_{\gamma|_{[0,t]} d\theta$ tend vers plus

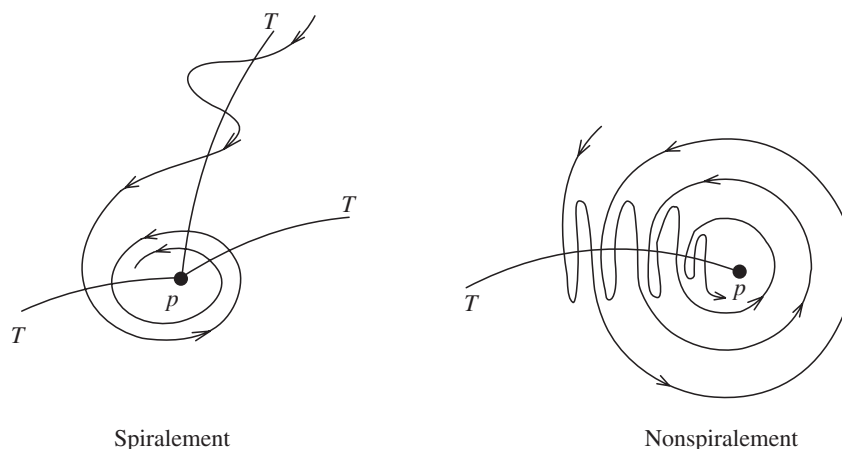


Figure 1.

ou moins l'infini si t tend vers l'infini. Cette dernière propriété n'implique pas en général que γ spirale autour de p . Cependant, nous verrons dans I.2 que c'est le cas lorsque γ est une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique.

Spiralement en dimension 3. En dimension 2, la définition de spiralement repose sur la notion de demi-branche analytique transversalement orientée par γ . En dimension 3 elle va reposer sur la notion de triangle analytique transversalement orienté par γ de côté une demi-branche analytique. Soit Γ une demi-branche analytique en un point p et soit $c :]0, \varepsilon[\rightarrow M^3$ un représentant de Γ où c est une application analytique de \mathbb{R} dans M^3 . Un *triangle semi-analytique de côté Γ* est un couple (T, W) où:

- i) W est un voisinage tubulaire ouvert semi-analytique de $c(]0, \varepsilon[)$. C'est-à-dire que W est un ouvert semi-analytique image de $]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^2$ par un plongement analytique j tel que $j(t, 0) = c(t)$.
- ii) T est une surface semi-analytique lisse, connexe contenue dans $W \setminus c(]0, \varepsilon[)$ telle que le triplet $(W, T, c(]0, \varepsilon[))$ soit homéomorphe à $(]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^2,]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^+ \times \{0\},]0, \varepsilon[\times \{0\} \times \{0\})$.

Deux triangles semi-analytiques (T_1, W_1) , (T_2, W_2) sont dits *compatibles* si $W_1 = W_2 = W$ et soit $T_1 = T_2$ soit il existe un homéomorphisme de $(W, T_1, T_2, c(]0, \varepsilon[))$ sur $(]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^2,]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^+,]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^-,]0, \varepsilon[\times \{0\} \times \{0\})$.

Compte tenu de la structure conique [Lo₂] des ensembles semi-analytiques, les propriétés i), ii) de (T, W) se germifient en p et dans leurs énoncés nous pouvons remplacer $c(]0, \varepsilon[)$ par Γ . Ceci justifie l'expression triangle analytique de côté Γ .

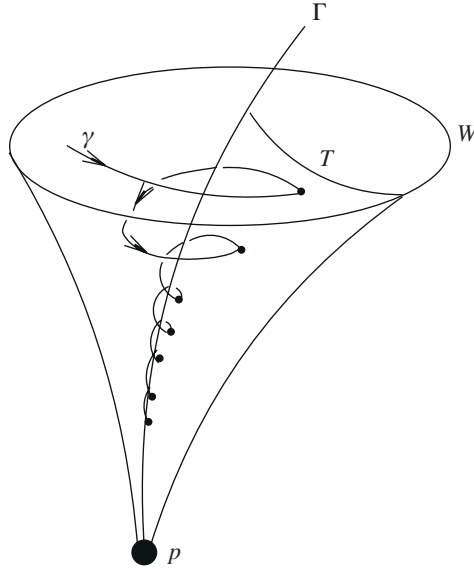


Figure 2.

Définition. *Supposons $\dim M = 3$ et soit Γ une demi-branche analytique en p . On dit que γ spirale autour de Γ (Γ est un axe de spiralement pour γ) si pour tout triangle analytique (T, W) de côté Γ , on a les propriétés: T est transversalement orienté par γ et $\gamma(t)$ appartient à W pour t assez grand (figure 2).*

Supposons que Γ soit un axe de spiralement lisse de γ . Soit $((x, z), U)$ une carte affine centrée en p telle que $\Gamma = \{x_1 = x_2 = 0, z > 0\}$. Notons $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t))$ et soit $\gamma_0 : t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ la projection de γ sur $z = 0$. A toute demi-branche analytique $T_0 \subset \{z = 0\}$ au point p correspond le triangle analytique (W, T) défini par

$$W = \{(x_1, x_2, z) : x_1^2 + x_2^2 < 1, z > 0\} \text{ et } T = \{(x_1, x_2, z) \in W : (x_1, x_2) \in T_0\}.$$

Ainsi, T_0 est transversalement orienté par γ_0 et $\omega(\gamma_0) = p$, la projection γ_0 de γ spirale autour de p . La réciproque n'est pas vraie en général, par exemple lorsque $|\gamma|$ est contenu dans le cône $x^2 + y^2 = z^2$.

Dans le cas général (axe de spiralement Γ non nécessairement lisse) la définition du spiralement axial n'est pertinente que s'il existe "beaucoup" de triangles analytiques de côté une demi-branche analytique Γ fixée. Le lemme suivant montre que c'est le cas.

Lemme. *Soit Γ une demi-branche analytique en $p = p_0 \in M^3$ et soit:*

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \xleftarrow{\dots}$$

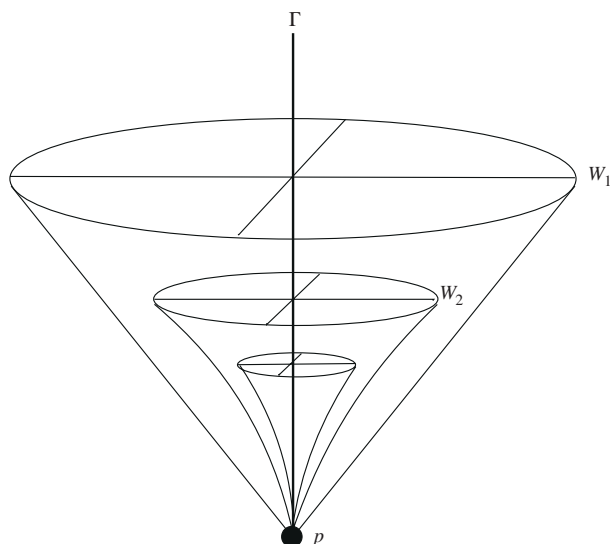


Figure 3.

la suite d'éclatements de centre p_0 et les points p_1, p_2, \dots de $TI(\Gamma)$. Il existe une suite d'ouverts semi-analytiques $\{W_n\}$ de M_0 qui possède les propriétés suivantes:

i) Pour tout n le germe de W_n en p contient Γ , p n'appartient pas à W_n et $W_{n+1} \subset W_n$.

ii) Si A est un ensemble semi-analytique tel que $\overline{A} \cap \Gamma = \emptyset$, alors $A \cap W_n = \emptyset$ pour n assez grand.

iii) Soit A un ensemble semi-analytique de dimension 2 tel que $A \cap \Gamma = \emptyset$ et $\Gamma \subset \overline{A}$. Il existe n_0 tel que, S_1, S_2, \dots, S_r désignant les composantes connexes de $A \cap W_{n_0}$, les $(S_i \cap W_n, W_n)$ sont des triangles semi-analytiques de côté Γ deux à deux compatibles pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $n \geq n_0$.

iv) Soient $W_{n,k}$ et Γ_k les images réciproques de W_n et Γ par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_k$. Etant donné $n > 0$, il existe $k_0, n' > n$ et une carte affine $(U, (x_1, x_2, z))$ en p_{k_0} tels que:

$$W_{n,k_0} \cap U = \{z > 0\} \quad , \quad \Gamma_{k_0} = \{x_1 = x_2 = 0, \quad z > 0\}, \quad \overline{W}_{n',k_0} \cap \{z = 0\} = \{p_{k_0}\}.$$

Ce lemme est une conséquence de l'existence de triangulations semi-analytiques des ensembles semi-analytiques [Lo₂], [Hi₁]. Il peut être aussi prouvé de façon plus élémentaire. Les assertions i), ii), iv) sont évidentes. L'assertion iii) se montre en utilisant les équations de A . En fait, lorsque Γ est désingularisée par un morphisme π nous pouvons essentiellement supposer que les W_n sont les projections par π des $W'_n = \{x^2 + y^2 < z^{2n}; 0 < z < 1/n\}$.

D'après iv), si $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(0) = p$ est une courbe analytique ayant un contact plat avec Γ , alors, quelque soit n , il existe t_n tel que $\gamma(t)$ appartient à W_n pour $t > t_n$. La proposition suivante précise le concept de spiralement axial.

Proposition. *Si γ spirale autour d'une demi-branche analytique Γ en p , alors γ a un contact plat avec Γ .*

Preuve. Raisonnons par l'absurde en reprennant les notations du lemme ci-dessus. Si γ n'a pas un contact plat avec Γ , il existe k tel que l'ensemble ω -limite, $\omega(\gamma_k)$ de $\gamma_k = (\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_k)^{-1}(\gamma)$ contienne un point $q \neq p_k$. D'après l'assertion iv) du lemme précédent il existe n et une suite $\{t_m\}$ tendant vers l'infini telle que $\gamma_k(t_m)$ n'appartient pas à W_n . Ainsi $\gamma(t)$ ne peut pas appartenir à W_n pour t assez grand. \square

Remarque. La définition que nous avons donnée du spiralement axial est très restrictive. Il est possible de l'affaiblir, par exemple en supprimant la condition " $\gamma(t) \in W$ pour t assez grand", ou en remplaçant "pour tout $(T, W) \dots$ " par "il existe un $(T, W) \dots$ ". Nous verrons, dans la suite, que toutes ces définitions sont équivalentes lorsque γ est une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique en dimension 3.

2. Courbes intégrales

Dans toute cette partie X désigne un champ de vecteurs analytique sur M^m dont p est un point singulier et γ désigne une demi-courbe intégrale, $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geq 0$ telle que $p = \omega(\gamma)$. Nous allons essentiellement étudier comment sont alors reliés les concepts: tangentes itérées, oscillation, spiralement en dimension 2 et 3. Auparavant, nous allons montrer des propriétés du contact plat qui sont vraies en toute dimension.

2.1. Contact plat entre une courbe intégrale et une demi-branche analytique. Les résultats énoncés dans les deux propositions suivantes sont peut-être déjà (bien) connus. Par exemple, celui de la première proposition peut certainement se déduire d'un théorème classique de Borel [Bo], celui de la deuxième paraît aussi classique, mais nous ne l'avons pas trouvé dans la littérature usuelle. Les démonstrations que nous en proposons sont géométriques. Elles utilisent essentiellement la "désingularisation" des demi-branches analytiques. La proposition 2.1.1. est un outil essentiel dans la preuve du théorème 1 et la proposition 2.1.2. dans la preuve du théorème 2.

2.1.1. Proposition. *Soit γ une demi-courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique X . Si γ a un contact plat en p avec une demi-branche analytique Γ , alors Γ est une courbe invariante par X .*

Avant d'aborder la preuve de cette proposition, précisons quelques notations qui seront utiles dans toute la suite. Soit $M = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \leftarrow \dots$ la suite d'éclatements de centre $p_0 = p, p_1, \dots$ où $TI(\Gamma) = \{p_n\}$. Pour $k \geq 1$ il existe un

unique champ de vecteurs analytique X_k sur M_k relié à X_{k-1} par π_k , avec $X_0 = X$. On dit que X_k est le relevé de X_{k-1} par π_k . Le diviseur $E_k = (\pi_1 \circ \pi_2 \cdots \circ \pi_k)^{-1}(p_0)$ est invariant par X_k . Une application $\gamma_{k-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow M_{k-1} \setminus E_{k-1}$, $t \mapsto \gamma_{k-1}(t)$, est une courbe intégrale de X_{k-1} si et seulement si son relevé $\gamma_k = \pi_k^{-1} \circ \gamma_{k-1}$ est une courbe intégrale de X_k .

Preuve. Supposons $TI^+(\Gamma) = TI^+(\gamma)$. Puisque les propriétés tangentes itérées, contact plat sont invariantes par éclatements, effondrements et que Γ est l'image d'une demi-branche orientée lisse par le composé d'un nombre fini d'effondrements, on peut supposer que $\Gamma = \{x_1 = x_2 = \cdots = x_{m-1} = 0, z > 0\}$ et que $E_0 = \{z = 0\}$ est invariant par le champ de vecteurs X . C'est-à-dire que

$$X = \sum_{i=1}^{m-1} \left(a_i(z) + \sum_{j=1}^{m-1} x_j a_{i,j}(x, z) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + za(x, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

les $a_i, a_i, a_{i,j}$ étant analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^m$. Si $a_i \equiv 0$ pour $i = 1, 2, \dots, m-1$, la demi-branche Γ est invariante par X . Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe $n \geq 0$ tel que l'on ait pour chaque i :

$$a_i(z) = z^n b_i(z) \quad , \quad \sum b_i^2(0) \neq 0 \quad , \quad b_i(z) \in \mathbb{R}\{z\}.$$

Il existe une carte (y, z) centrée en p_n telle que:

$$(y, z) = (z^n x, z) \quad , \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1}).$$

Le relevé X_n de $X = X_0$ s'écrit dans ces coordonnées:

$$X_n = \sum_{i=1}^{m-1} \left(b_i(z) + \sum_{j=1}^{m-1} y_j b_{i,j}(z^n y, z) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + za(z^n y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

où les $b_{i,j}$ sont analytiques au voisinage de 0. On a alors:

$$X_n(p_n) = X_n(0) = \sum_{i=1}^{m-1} b_i(0) \frac{\partial}{\partial y_i} \neq 0 \quad ,$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse $\omega(\gamma_n) = p_n$. □

2.1.2. Proposition. Soient X un champ de vecteurs analytique sur M^m singulier en p , Γ une demi-branche analytique en p invariante par X et soit $v(\Gamma)$ un vecteur tangent à Γ en p . Alors, $v(\Gamma)$ est un vecteur propre de la partie linéaire $DX(p)$. De plus, la valeur propre $\mu(\Gamma)$ correspondant à $v(\Gamma)$ est nulle s'il existe une demi-courbe intégrale positive de X distincte de Γ ayant un contact plat avec Γ en p .

Preuve. La première assertion de la proposition est une conséquence de la remarque suivante. Si $\pi_1 : M_1 \rightarrow M$ est l'éclatement de centre p , alors un point $q \in E_1 = \pi_1^{-1}(p) = \mathbb{R}P(m-1)$ est un point fixe de X_1 le relevé de X si et seulement si $q \in \mathbb{R}P(n-1)$ est une direction propre de $DX(p)$. En effet, p_1 est un point singulier de X_1 si p_1 est la direction de la tangente à Γ en p . La preuve de la seconde partie de la proposition repose essentiellement sur l'étude de l'évolution du spectre de $DX(p)$ par éclatement. Elle est décrite par l'assertion suivante.

Assertion. Soit $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu(\Gamma)\}$ le spectre de $DX(p)$ où $\mu(\Gamma)$ est la valeur propre correspondant à un vecteur $v(\Gamma)$ tangent à Γ en p , i.e $p_1 = [v(\Gamma)] \in \mathbb{R}P(m-1)$. Alors $E_1 = \pi^{-1}(p)$ est invariant par X_1 et on a:

$$\begin{aligned} \text{Spec } (DX_1(p_1)) &= \{\mu_1 - \mu(\Gamma), \dots, \mu_{m-1} - \mu(\Gamma), \mu(\Gamma)\} \\ &= \text{Spec } \left(DX_1(p_1) |_{E_1} \right) \cup \{\mu(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

De plus si H est une hypersurface lisse invariante par X , si $v(\Gamma)$ est tangent à H et si μ_1 correspond à un vecteur propre transverse à H , alors X_1 est tangent au transformé strict H_1 de H par π_1 et on a:

$$\text{Spec } (DX_1(p_1)) = \{\mu_1 - \mu(\Gamma)\} \cup \text{Spec } (DX_1(p_1) |_{H_1}).$$

Pour prouver cette assertion choisissons des coordonnées (x, z) , $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ en p telles que $v(\Gamma)$ soit tangent à l'axe $x = 0$. On écrit

$$X = \sum_i \left(\langle a_i, x \rangle + f_i(x, z) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\mu(\Gamma)z + \langle b, x \rangle + \dots \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

où \dots désigne des termes d'ordre ≥ 2 et \langle, \rangle désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^{m-1} . Dans ces coordonnées on a:

$$DX(p) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ b & \mu(\Gamma) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m-1}) \\ b = (b_1, b_2, \dots, b_{m-1}) \end{cases}$$

et $A = (a_{i,j})$. Soient (x', z) des coordonnées en p_1 telles que $x = zx'$. Dans ces coordonnées on a

$$DX_1(p_1) = \begin{pmatrix} A - \mu(\Gamma)I_{m-1} & c \\ 0 & \mu(\Gamma) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c_{m,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2} (0, 0).$$

Ceci prouve la première partie de l'assertion. Pour prouver la deuxième partie choisissons des coordonnées (x, z) tels que $H = \{x_1 = 0\}$. Alors $\{x_1 = 0\}$ étant

invariant par X on a $a_1 = 0$ et f_1 est divisible par x_1 , en particulier $c_{m,1} = 0$. On en déduit:

$$\text{Spec}(DX_1(p_1)) = (\mu_1 - \mu(\Gamma)) \cup \text{Spec}(DX_1(p_1)|_{\{x'_1=0\}}),$$

ce qui prouve l'assertion puisque $\{x'_1 = 0\}$ est le transformé strict H_1 de H .

Fin de la preuve de la proposition. Cette preuve se fait par récurrence sur m la dimension de M et par l'absurde. C'est-à-dire que nous allons montrer que $\mu(\Gamma) \neq 0$ est incompatible avec l'hypothèse γ, Γ sont des demi-courbes intégrales de X ayant un contact plat et $|\gamma| \neq \Gamma$. Lorsque $m = 1$, cette contradiction est évidente puisque la condition $\omega(\gamma) = \omega(\Gamma)$ implique $\gamma \equiv \Gamma$.

Supposons $m > 1$ et $\mu(\Gamma) \neq 0$, alors $\mu(\Gamma) < 0$ puisque $p = \omega(\gamma)$. Les courbes $|\gamma|, \Gamma$ sont tangentes à $W^s(X, p)$, la variété stable de X en p . Ainsi $|\gamma|$ et Γ sont contenues dans $W^s(X, p)$ qui est analytique lisse ([Po], [Ha]). Si $W^s(X, p)$ n'est pas de dimension m on aboutit à une contradiction d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi on peut supposer que toutes les valeurs propres de $DX(p)$ ont une partie réelle négative.

Notons $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ la suite d'éclatements de centres les points $p_k \in TI(\Gamma)$ et posons $\Gamma = \Gamma_0, \gamma = \gamma_0, \Gamma_k = \pi_k^{-1}(\Gamma_{k-1}), \gamma_k = \pi_k^{-1}(\gamma)$. Puisque Γ_k est invariante par X_k , le relevé de X_{k-1} , sa tangente $\tau(\Gamma_k)$ en p_k est une direction propre de $DX_k(p_k)$ de valeur propre $\mu(\Gamma_k)$. En fait p_{k+1} est le point de $\pi_k^{-1}(p_k) \equiv \mathbb{R}P(m-1)$ correspondant à $\tau(\Gamma_k)$ et de plus Γ_k, γ_k ont encore un contact plat. Distinguons deux cas:

1^{er} cas, Γ est lisse. En choisissant des coordonnées $(x^{(k)}, z)$ en p_k telles que $\Gamma_k = \{x^{(k)} = 0\}$, on a, d'après l'assertion précédente (et avec les mêmes notations)

$$\text{Spec}(DX_k(p_k)) = \{\mu_1 - k\mu(\Gamma), \dots, \mu_{m-1} - k\mu(\Gamma)\} \cup \{\mu(\Gamma)\}.$$

Ainsi, $\mu(\Gamma)$ étant strictement négatif, pour k assez grand les $\mu_j - k\mu(\Gamma)$ ont tous des parties réelles positives. La variété stable $W^s(X_k, p_k)$ est de dimension 1. On termine par récurrence.

2^{ème} cas, Γ singulière. Notons tout d'abord que $\mu(\Gamma_k)$ ne peut pas rester strictement négatif pour tout k . En effet, pour k assez grand, Γ_k est lisse et si $\mu(\Gamma_k) < 0$ pour tout k on retombe dans le cas précédent. Ainsi, il existe ℓ tel que $\mu(\Gamma_{\ell-1}) < 0$ et $\mu(\Gamma_\ell) = 0$. De plus, d'après le premier cas, on peut choisir ℓ tel que $\mu(\Gamma_j) = 0$ pour $j \geq \ell$. D'après l'assertion on a:

$$\text{Spec}(DX_\ell(p_\ell)) = \{\mu(\Gamma_{\ell-1})\} \cup \text{Spec}(DX_\ell(p_\ell)|_{E_\ell})$$

où $E_\ell = \pi^{-1}(p_{\ell-1})$. Puisque $\mu(\Gamma_\ell) = 0$, la tangente $\tau(\Gamma_\ell)$ est tangente en p_ℓ à E_ℓ . Pour tout indice $j \geq \ell$ on a d'après l'assertion

$$\text{Spec}(DX_\ell(p_\ell)) = \text{Spec}(DX_j(p_j)) = \{\mu(\Gamma_{\ell-1})\} \cup \text{Spec}(DX_j(p_j)|_{F_j})$$

où F_j est le transformé strict de E_ℓ par $\pi_j \circ \pi_{j-1} \circ \dots \circ \pi_{\ell+1}$. Alors Γ_j est tangent à F_j pour $j \geq \ell$ et ainsi Γ_ℓ est contenu dans E_ℓ . Ce qui est absurde.

2.2. Foyer monodromique. Supposons $\dim M = 2$. On dit que p est *un foyer monodromique contractant de X* s'il existe une demi-branche analytique $\Gamma = c(]0, \varepsilon[)$, où c est une application analytique avec $c(0) = p$, telle que, toute orbite positive $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow M$ de X issue d'un point $c(s)$, $0 < s < \varepsilon$, recoupe Γ une première fois en un point $c(s_1)$ avec $s_1 < s$. L'application $c(s) \mapsto c(s_1)$ est *l'application premier retour de Poincaré* de p évaluée sur Γ pour X . Le résultat suivant est bien connu. Ses preuves classiques reposent sur le théorème de désingularisation des champs de vecteurs en dimension 2 [Se] ou encore sur un argument de Khovanski [Kh]. Celle que nous proposons utilise de façon essentielle la proposition du paragraphe 1.2.

Théorème. *Supposons que p soit un point singulier de X et soit γ une demi-courbe intégrale de X telle que $\omega(\gamma) = p$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i) γ ne possède pas de tangente en p .*
- ii) γ ne possède pas la propriété des tangentes itérées en p .*
- iii) γ est oscillante en p par rapport à une demi-branche analytique Γ .*
- iv) γ spirale autour de p .*
- v) p est un foyer monodromique contractant.*
- vi) Il existe un voisinage V (semi-analytique) de p positivement invariant par X tel que toute demi-courbe intégrale de X issue d'un point de V spirale autour de p .*

Preuve. Il est clair que vi) implique i), que i) implique ii) et ii) implique iii) d'après la proposition de 1.2. Prouvons que iii) implique iv). Soit c une application analytique de \mathbb{R} dans M telle que $c(0) = p$, $c(]0, \varepsilon[) = \Gamma$. L'ensemble des $s > 0$ tels que $X(c(s))$ et $c'(s)$ soient colinéaires est un sous-ensemble analytique strict de \mathbb{R} puisque $|\gamma| \not\subset \Gamma$. On peut le supposer vide en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit. En particulier, Γ est transversalement orientée par γ , ce qui prouve iv). Montrons que iv) (ou iii) implique v). On sait déjà que toutes les demi-courbes intégrales de X coupent Γ transversalement et toujours dans le même sens. Soit $q_0 = c(s_0)$, $q_1 = c(s_1)$ deux points d'intersection consécutifs de $|\gamma|$ avec Γ et soit K le compact de bord la réunion des arcs $q_0 q_1$ sur Γ et $|\gamma|$. L'argument classique utilisé dans la preuve du théorème de Poincaré-Bendixson appliqué à K montre que toute demi-courbe intégrale de X issue d'un point $c(s'_0)$ de Γ avec $s'_0 < s_0$ recoupe Γ en un point s'_1 avec $s'_1 < s_1$ (figure 4). Ceci prouve clairement les assertions v) et vi) en prenant $V = \text{int } K$. \square

2.3. Tangentes itérées, oscillation et spiralement axial. Dans tout ce paragraphe on suppose $\dim M = 3$ et γ désigne une demi-courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique X sur M telle que $\omega(\gamma) = p$ est un point singulier (non nécessairement isolé) de X . Nous avons vu dans le paragraphe précédent

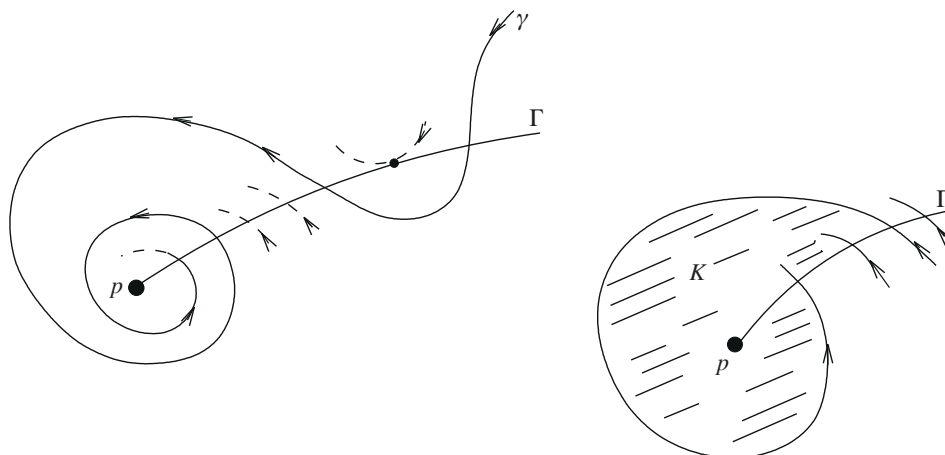


Figure 4.

qu'en dimension 2 les propriétés γ "oscille", " γ possède des tangentes itérées" sont incompatibles. Cette dichotomie est propre à la dimension 2. En dimension 3, il faut la remplacer par le spiralement axial comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit γ une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique sur une variété de dimension 3. Alors γ spirale autour d'une demi-branche analytique Γ en p si et seulement si γ a la propriété des tangentes itérées en p et est oscillante par rapport à une surface semi-analytique S .*

Preuve. Si Γ est un axe de spiralement pour γ , nous avons déjà vu avec la proposition de 1.4 que γ a un contact plat avec Γ . De plus, γ est oscillante par rapport à toute surface semi-analytique S telle que $\Gamma \subset \overline{S \setminus \Gamma}$ d'après le lemme de 1.4 et la définition de spiralement axial. Supposons que γ possède des tangentes itérées orientées $TI^+(\gamma)$ et que γ est oscillante par rapport à une surface semi-analytique S . Montrons que γ spirale autour d'une demi-branche Γ .

1^{ère} étape, γ a un contact plat avec une demi-branche analytique Γ .

Quitte à compléter S en une surface analytique et à prendre une composante irréductible, nous pouvons supposer que S est irréductible et qu'il existe une carte affine $(U, (x, y, z))$ centrée en $p = \omega(\gamma)$ et une fonction analytique f sur U telle que

$$\text{Sing } f \subset \{f = 0\}, \quad \dim(\text{Sing } f) \leq 1, \quad S = U \cap \{f = 0\}.$$

De plus quitte à éclater une fois, on peut aussi supposer que $|\gamma| \subset U^+ = \{z > 0\}$. Remarquons tout d'abord que γ coupe une infinité de fois $S' = S \setminus \text{Sing } f$. En effet, si ce n'est pas le cas, γ coupe une infinité de fois une demi-branche analytique Γ en p contenue dans $S \cap \text{Sing } f$. Les courbes γ et Γ ont les mêmes tangentes itérées.

D'après la proposition 2.1, Γ est une demi-courbe intégrale de X . Ainsi $|\gamma|$ est contenue dans S et γ n'est pas oscillante par rapport à S .

Soit $Z = S \cap \{df(X) = 0\}$ l'ensemble des points de "tangence généralisés" de X et de S . Montrons tout d'abord que $\dim Z \leq 1$. En effet, S étant irréductible, si $\dim Z = 2$ on a $Z = S$. La partie lisse S' de S est invariante par X . Puisque γ coupe S' , $|\gamma|$ est contenu dans S et ainsi γ n'est pas oscillante par rapport à S . Quitte à prendre une nouvelle carte affine centrée en p on peut supposer que $Z \cap U^+ = Z^+$ est une union finie, éventuellement vide, de demi-branches analytiques. Montrons qu'une de ces branches a un contact plat avec γ . Si ce n'est pas le cas et si $TI(\gamma) = \{p_n\}$ il existe ℓ tel que p_ℓ n'appartienne pas à la réunion des tangentes itérées de ces branches. Soit $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_\ell$ le composé de la suite d'éclatements de centres $p, p_1, \dots, p_{\ell-1}$. Il existe une carte affine (U_ℓ) , centrée en p_ℓ telle que si U_ℓ^+ est la composante connexe de $U_\ell \setminus \pi^{-1}(p)$ contenant $\gamma_\ell = \pi^{-1}(\gamma)$ on ait $Z_\ell^+ = U_\ell^+ \cap \pi^{-1}(Z) = \emptyset$. Posons $S_\ell = \pi^{-1}(S)$, $f_\ell = f \circ \pi$ et soit X_ℓ le relevé de X par π . La restriction de π à U_ℓ^+ étant un isomorphisme sur son image, on a :

$$S_\ell \cap \{df_\ell(X_\ell) = 0\} \cap U_\ell^+ = Z_\ell^+ = \emptyset.$$

Ainsi, en oubliant l'indice ℓ et en identifiant une carte affine avec \mathbb{R}^3 , nous sommes dans la situation suivante: f est une fonction analytique sur \mathbb{R}^3 , X un champ de vecteurs analytique sur \mathbb{R}^3 , γ une demi-courbe intégrale de X avec $\omega(\gamma) = \{0\}$ et nous devons prouver que les deux conditions:

$$\# f^{-1}(0) \cap |\gamma| \cap U^+ = \infty, \quad \{df(X) = 0\} \cap f^{-1}(0) \cap U^+ = \emptyset$$

sont incompatibles, où U^+ est une composante connexe du complémentaire de $x^{\varepsilon_1}y^{\varepsilon_2}z = 0$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ égaux à 0 ou 1 telle que $|\gamma| \subset U^+$. Soit S_1 une composante connexe de $f^{-1}(0) \cap U^+$ qui est coupée une infinité de fois par γ . D'après la deuxième condition, S_1 est une hypersurface fermée de U^+ et $U^+ \setminus S_1$ a deux composantes connexes. Puisque $df(X)|_{S_1} \neq 0$ toute demi-orbite positive de X issue d'un point de S_1 et contenue dans U^+ est contenue dans une de ces deux composantes connexes ; ceci contredit la condition $\# |\gamma| \cap S^+ = \infty$.

2. Fin de la preuve. D'après les arguments développés dans la première partie, l'ensemble Z^+ des points de tangence de X avec $S^+ = f^{-1}(0) \cap \{z > 0\}$ est la réunion de Γ , une demi-branch analytique ayant un contact plat avec γ , et d'un nombre fini de demi-branches analytiques parasites. D'après le lemme de 1.4, et en reprenant ses notations, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $W_n \cap Z^+ = \Gamma$ et, S_1, S_2, \dots, S_r désignant les composantes connexes de $S^+ \cap W_n \setminus \Gamma$, les couples $(W_n \cap S_i, W_n)$ sont des triangles de côté Γ . Ainsi, il existe ℓ_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $R_n = W_n \cap S_{\ell_0}$ soit transversalement orienté par γ . De plus, puisque γ a un contact plat avec Γ , on sait que $\gamma(t) \in W_n$ pour t assez grand. Nous avons ainsi déjà montré que les triangles (R_n, W_n) , pour $n \geq n_0$, satisfont aux conditions de la définition " γ spirale autour de Γ ".

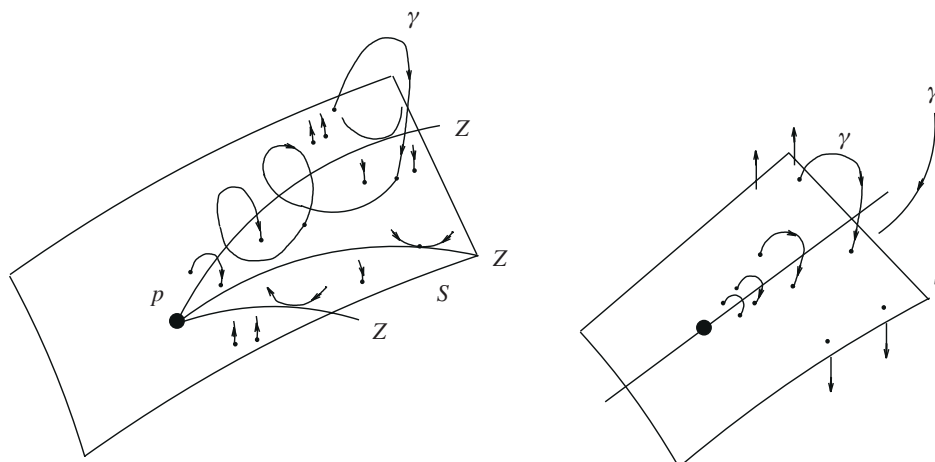


Figure 5.

Montrons que ces conditions sont vérifiées pour tout triangle de côté Γ . Soit (T, W) un tel triangle. D'après le lemme de 1.4, il existe n_1 et une composante connexe T_1 de $W_{n_1} \cap T$ telle que pour $n > n_1$ le couple $(T_1 \cap W_n, W_n)$ soit un triangle de côté Γ compatible avec (R_n, W_n) . L'ensemble des points de tangence de X avec T_1 est d'après les arguments développés dans la première partie, un ensemble semi-analytique Z_1 de dimension au plus 1. D'après l'assertion ii) du lemme de 1.4, il existe n_2 tel que, pour $n > n_2$, on ait $Z_1 \cap W_{n_1} = \emptyset$; c'est-à-dire que $T_1 \cap W_{n_1}$ est transverse à X .

Montrons, pour achever la preuve, que γ coupe une infinité de fois $T_1 \cap W_n$ pour $n > n_2$ lorsque $T_1 \cap W_n$ est différent de R_n . Soient $\gamma(t_0), \gamma(t_1)$ avec $t_0 < t_1$ deux points d'intersection consécutifs de γ avec R_n . Les triangles $(R_n, W_n), (T_1 \cap W_n, W_n)$ étant compatibles, le complémentaire de $T_1 \cup \Gamma$ dans $W_n \setminus R_n$ a deux composantes connexes. Puisque $\gamma([t_0, t_1])$ relie deux composantes connexes distinctes du bord de $W_n \setminus R_n$, il existe $t_0 < t_2 < t_1$ tel que $\gamma(t_2)$ appartient à $T_1 \cap W_n$. \square

Corollaire 1. *La propriété de spiralement axial est invariante par éclatement et effondrement pour les courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique réel.*

Preuve. Soit $\pi : M_1 \rightarrow M$ l'éclatement de centre $p \in M$ et soit γ une courbe analytique de X tel que $\omega(\gamma) = p$. Supposons que γ spirale autour d'une demi-branche Γ . Alors γ possède des tangentes itérées et oscille par rapport à une surface S . La courbe $\gamma_1 = \pi^{-1} \circ \gamma$ possède des tangentes itérées et oscille par rapport à $S_1 = \pi^{-1}(S)$. D'après le théorème, γ_1 spirale autour d'une demi-branche analytique.

Supposons que $\gamma_1 = \pi \circ \gamma$ spirale autour de Γ_1 . Alors $\pi(\Gamma_1) = \Gamma$ est une

demi-branche analytique qui a un contact plat avec γ . Si S est une surface semi-analytique telle que $\Gamma \subset \overline{S \setminus \Gamma}$, d'après la définition du spiralement on sait que:

$$\# \pi^{-1}(S) \cap |\gamma_1| = \# S \cap |\gamma| = \infty.$$

Ainsi γ spirale autour de Γ d'après le théorème. \square

Corollaire 2. (*Propriété caractéristique du spiralement axial*). Soit γ une courbe intégrale de X telle $\omega(\gamma) = p$ et soit Γ une demi-branche analytique en p . Alors γ spirale autour de Γ si et seulement si pour toute surface semi-analytique S de M^3 on a l'équivalence suivante: $\# S \cap |\gamma| = \infty \iff \Gamma \subset \overline{S \setminus \Gamma}$.

Preuve. Supposons que γ spirale autour de Γ et soit S une surface. Si $\Gamma \subset \overline{S \setminus \Gamma}$, d'après le lemme de 1.4 (existence de triangle analytique) et la définition du spiralement γ est oscillante par rapport à S . Si $\Gamma \cap \overline{S \setminus \Gamma} = \emptyset$, d'après le lemme 1.4, il existe un voisinage ouvert W_n de Γ tel que $S \cap W_n = \emptyset$ et $\gamma(t) \in W_n$ pour t assez grand.

Supposons que l'équivalence soit vraie pour tout S de M^3 . L'argument utilisé ci-dessus montre que l'implication $\# S \cap |\gamma| = \infty \implies \Gamma \subset \overline{S \setminus \Gamma}$ entraîne que γ a un contact plat avec Γ . La deuxième implication entraîne que γ est oscillante. Ainsi, γ spirale autour de Γ d'après le théorème. \square

Corollaire 3. Supposons que γ (courbe intégrale de X sur M^3) ait un contact plat avec une demi-branche Γ lisse et soit (x_1, x_2, z) une carte affine en $p = \omega(\gamma)$ telle que:

$$\Gamma = \{x_1 = x_2 = 0, z > 0\}, \quad \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t)).$$

Alors γ spirale autour de Γ si et seulement si la projection $\gamma_0(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de γ sur $z = 0$ spirale autour de p .

Preuve. On a déjà vu dans 1.4 que si γ spirale autour de Γ , alors γ_0 spirale autour de p . Si γ_0 spirale autour de p , il est clair que γ est oscillante par rapport au plan $x_1 = 0$ et ainsi γ spirale autour de Γ d'après le théorème. \square

Remarque. Ce corollaire nous incite à comparer le spiralement autour d'un point en dimension 2 et le spiralement axial en dimension 3. Nous avons vu (avec le théorème de 2.2) que dans le premier cas, l'existence d'une courbe intégrale qui spirale autour de p implique que p est un foyer monodromique, c'est-à-dire l'existence d'un voisinage (semi-analytique) de p , invariant par X et formé de courbes intégrales qui spirales autour de p . En dimension 3, nous savons prouver ce résultat lorsque l'axe de spiralement n'est pas formé de points fixes. C'est l'objet essentiel du chapitre suivant.

II. Axes de tourbillonnement

Soient M une variété analytique réelle de dimension trois et X un champ de vecteurs analytique sur M .

Définitions. Si Γ est une demi-branche analytique en un point p de M nous dirons que:

i) Γ est un axe de spiralement non dégénéré de X si Γ est un axe de spiralement pour une demi-courbe intégrale γ et Γ n'est pas contenu dans $\text{Sing } X$.

ii) Γ est un axe de tourbillonnement de X s'il existe un voisinage ouvert semi analytique V de Γ qui est positivement invariant par X et tel que Γ soit un axe de spiralement pour toute demi-courbe intégrale positive γ d'origine un point de $V \setminus \Gamma$. Nous dirons alors que V est un domaine de tourbillonnement pour Γ . De plus nous dirons que Γ est un axe de tourbillonnement non dégénéré si $\Gamma \not\subset \text{Sing } X$.

Le but principal de ce chapitre est de montrer le théorème suivant.

Théorème 2. Si Γ est un axe de spiralement non dégénéré de X alors Γ est un axe de tourbillonnement de X .

Les axes de tourbillonnement non dégénérés sont clairement des “centres organisateurs” de la dynamique au sens de R. Thom [Th₂]. Le résultat suivant montre que ces axes possèdent les propriétés de finitude, d'analyticité que l'on souhaite.

Corollaire. Soit p un point de M . L'ensemble des axes de spiralement en p est fini. L'ensemble des axes de tourbillonnement non dégénérés est localement fini en p , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de p qui ne contient qu'un nombre fini d'axes de tourbillonnement non dégénérés.

On déduit de ce corollaire que l'ensemble des axes de spiralement de X est contenu dans un sous-ensemble semi analytique de dimension 1. Ces résultats ne sont pas entièrement satisfaisants. Nous ne savons pas si le nombre d'axes de tourbillonnement (éventuellement dégénérés) est fini. En particulier, nous ne savons pas si la situation suivante peut se présenter pour un champ de vecteurs X analytique dans le voisinage de $0 \in \mathbb{R}^3$: la droite $\Delta = \{y = z = 0\}$ est contenue dans $\text{Sing } X$ et il existe une suite de points $p_n = (x_n, 0, 0)$, $x_{n+1} < x_n$, tendant vers 0, tel que le germe de Δ en p_n soit un axe de tourbillonnement de X (figure 6).

La preuve du théorème 2 est décomposée en trois étapes. Dans la première nous étudions le spectre de $DX(p)$ lorsque p est un *point singulier élémentaire* de X , i.e. lorsque $DX(p)$ n'est pas nilpotente et nous en déduisons le concept de *singularité réduite spiralante*. Dans le paragraphe suivant nous montrons que le théorème est vrai pour ces singularités. Enfin, dans la dernière étape, nous montrons tout d'abord qu'il est vrai pour les singularités élémentaires et ensuite en utilisant des éclatements et des ramifications nous montrons que le cas général

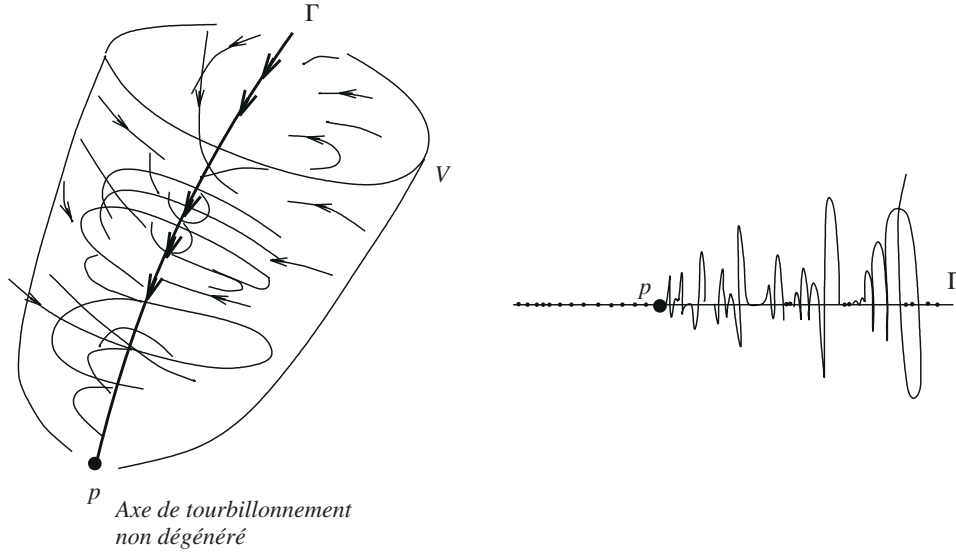


Figure 6.

se ramène au cas élémentaire. Le paragraphe suivant est consacré à la preuve du résultat de finitude, elle repose sur l'uniformisation locale des champs de vecteurs en dimension 3. Enfin, dans le dernier paragraphe nous étudierons le caractère “équilibré” des axes de tourbillonnement non dégénérés.

1. Singularités élémentaires. La preuve de la proposition suivante utilise essentiellement la proposition 2.1.2. du chapitre précédent.

Proposition. *Soit p une singularité élémentaire ($DX(p)$ non nilpotente) d'un champ de vecteurs analytique X sur M . Supposons que Γ soit un axe de spiralement non dégénéré d'une demi-courbe intégrale γ de X avec $p = \omega(\gamma)$. Alors Γ est lisse, sa tangente en p est une direction propre de $DX(p)$ de valeur propre $\mu(\Gamma) = 0$ et les deux autres valeurs propres de $DX(p)$ sont conjuguées à partie réelle négative ou nulle.*

Preuve. D'après le théorème 1, γ a un contact plat avec Γ et, d'après la proposition 2.1.2., la tangente à Γ en p est une direction propre de $DX(p)$ de valeur propre $\mu(\Gamma) = 0$. Notons $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ la suite d'éclatements de centre les points $\{p_k\}$ de $TI(\Gamma)$ avec $p_0 = p$, $M_0 = M$ et soit $\ell \geq 0$ le premier entier tel que $\Gamma_\ell = \pi_\ell^{-1}(\Gamma_{\ell-1})$ soit lisse. D'après l'assertion de la preuve de proposition 2.1.2.

$$\text{Spec}(DX(p)) = \text{Spec}(DX_\ell(p_\ell)).$$

Ainsi, pour étudier le spectre de $DX(p)$, nous pouvons supposer que Γ est lisse. Choisissons une carte affine en p telle que $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$. Soit γ' l'image

de γ par la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. D'après I.1.4, la demi-courbe γ' spirale autour de p dans le plan $z = 0$. Soit $\sigma : \widetilde{M} \rightarrow M$ l'éclatement de centre la droite $x = y = 0$ et soit $\widetilde{\gamma} = \sigma^{-1} \circ \gamma$ le relevé de γ par σ . Puisque γ' spirale autour de p on a $\omega(\widetilde{\gamma}) = \sigma^{-1}(p) \simeq S^1$. Montrons (par l'absurde) que les valeurs propres μ', μ'' de $DX(p)$ distinctes de $\mu(\Gamma)$ sont conjuguées, en particulier $\mu' = \bar{\mu}'' \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, μ', μ'' sont réelles distinctes. On peut choisir les coordonnées x, y , telles que le jet d'ordre 1 de X en p s'écrive (compte tenu du fait que $x = y = 0$ est invariant)

$$J^1 X(p) = \mu' x \frac{\partial}{\partial x} + \mu'' y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{avec } \mu' \neq 0.$$

Soient $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ des coordonnées sur \widetilde{M} au point $\tilde{p} \in \mathbb{R}P(1)$ correspondant à $y = z = 0$ telles que $\tilde{x} = x/y, \tilde{y} = y, \tilde{z} = z$, et soit \tilde{X} le relevé de X par σ . Alors la restriction de \tilde{X} à $\sigma^{-1}(p)$ s'écrit dans ces coordonnées

$$\tilde{X}|_{\sigma^{-1}(p)} = (\mu' - \mu'')\tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}.$$

Puisque $\mu' \neq \mu''$, \tilde{p} est un point singulier hyperbolique de $\tilde{X}|_{\sigma^{-1}(p)}$ et alors $\sigma^{-1}(p)$ ne peut pas être un cycle limite de $\tilde{\gamma}$, en particulier $\omega(\tilde{\gamma}) \neq \sigma^{-1}(p)$.

Montrons que Γ est lisse. Si ce n'est pas le cas il existe un entier $k > 0$ tel que Γ_k est tangente au diviseur exceptionnel $\pi_{k-1}^{-1}(p_k) = E_k$. Ainsi $\mu(\Gamma_k) = 0$ est une valeur propre de la restriction de $DX_k(p_k)$ à E_k . D'après l'assertion de la preuve de la proposition 2.1.2., ceci est impossible puisque l'on a:

$$\text{Spec} \left(DX_k(p_k) |_{E_k} \right) = \text{Spec} \left(DX_{k-1}(p_{k-1}) |_{E_{k-1}} \right) = \dots = \{\mu', \bar{\mu}'\}. \quad \square$$

Corollaire. *Soit p une singularité élémentaire de X . Il existe au plus deux axes de spiralement non dégénérés en p . De plus, il n'existe pas de suite de points $\{q_n\}, q_n \neq p$, tendant vers p telle que X possède un axe de spiralement non dégénéré Γ_n au point p_n .*

Preuve. Soit Γ un axe de spiralement en p pour γ . La suite de points $TI(\Gamma) = \{p_k\}$ est uniquement déterminée par la condition: le point $p_k \in \mathbb{R}P(2) = \pi_{k-1}^{-1}(p_{k-1})$ est l'image par la projection canonique de \mathbb{R}^3 sur $\mathbb{R}P(2)$ du noyau de $DX_{k-1}(p_{k-1})$. Ceci montre la première partie du corollaire. Pour prouver la seconde partie, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $\{q_n\} \rightarrow p$ et une double suite $\{(\Gamma_n, \gamma_n)\}$ d'axes de spiralement Γ_n pour des courbes intégrales γ_n de X aux points q_n . Puisque les courbes Γ_n, γ_n ne rencontrent pas le lieu singulier de X , on peut supposer (quitte à diviser X par une unité) que $\dim \text{Sing } X = 1$. Il existe une demi-branche $\Delta \subset \text{Sing } X$ contenant une infinité de q_n . Puisque $\text{Ker } DX(p)$ est de dimension 1, on peut choisir $q_n \in \Delta$ voisin de p tel que $\text{Ker } DX(q_n)$ soit aussi de dimension 1 et tel que le germe Δ_n de Δ en q_n soit non singulier. Puisque $T_{q_n} \Delta_n$ et $T_{q_n} \Gamma_n$ sont contenus dans $\text{Ker } DX(q_n)$ on a $T_{q_n} \Delta_n = T_{q_n} \Gamma_n$. En répétant

cet argument après éclatement on a $TI(\Delta_n) = TI(\Gamma_n)$. Ainsi $\Gamma_n \equiv \Delta_n \subset \text{Sing } X$ ce qui contredit l'hypothèse Γ_n est un axe de spiralement non dégénéré. \square

2. Singularités spirales réduites. Dans le paragraphe suivant nous verrons qu'après un nombre fini d'éclatements, les singularités élémentaires qui portent des axes de spiralement non dégénérés satisfont à la définition suivante.

Définition. *Un point p de $\text{Sing } X$ est une singularité spirale réduite s'il existe une carte affine $((x, y, z), U)$ en p telle que $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$ soit un axe de spiralement d'une demi-courbe intégrale γ_0 et telle que*

$$X = \sum_{i=0}^q z^i L_i + z^{q+1} \left(-\frac{\partial}{\partial z} + V \right) \quad \text{où } q \geq 1 \text{ et}$$

- i) $L_i(x, y) = (\alpha_i x + \beta_i y) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma_i x + \delta_i y) \frac{\partial}{\partial y}$ avec L_0 non nilpotent.
- ii) $V = a(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y}$ avec $a(0, 0, z) = b(0, 0, z) \equiv 0$.

De telles coordonnées s'appellent des coordonnées adaptées à (X, p) .

La composante de X sur $\frac{\partial}{\partial z}$ étant $-z^{q+1}$ les demi-courbes intégrales γ de X d'origine un point $\gamma(0) \in \{z > 0\}$ sont contenues dans $\{z > 0\}$ et peuvent être paramétrées par z . Plus précisément, ces courbes sont solutions de l'équation différentielle dans \mathbb{R}^2 (dépendant du temps z) suivante:

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{z^{q+1}} \left(\sum_{i=0}^q z^i L_i(u) \right) - V(u, z) \quad \text{avec } u = (x, y).$$

On écrit $\underline{\gamma}(z) = (x(z), y(z), z) = (u(z), z)$ la paramétrisation correspondante de $|\gamma|$ et on pose $r^2(z) = \|u(z)\|^2 = x^2(z) + y^2(z)$. Compte tenu de la condition $V(0, z) \equiv 0$, on peut supposer que $\|V(u, z)\| < 1$ pour $z \in C_1$ avec $C_\varepsilon = \{x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \varepsilon\}$.

D'après la proposition du paragraphe précédent, le spectre de $DX(p) = L_0$ est du type $\{0, \lambda, \bar{\lambda}\}$. On dit que (X, p) est *asymptotiquement monodromique* (resp. non asymptotiquement monodromique) si $\lambda \neq \bar{\lambda}$ (resp. $\lambda = \bar{\lambda}$). Pour prouver le théorème pour les singularités réduites nous envisageons ces deux cas. Le premier a déjà été étudié dans [Bo-Du] avec une autre approche.

Proposition 2.1. *Soit (X, p) une singularité spirale réduite, asymptotiquement monodromique d'axe Γ . Alors Γ est un axe de tourbillonnement. De plus dans des coordonnées adaptées bien choisies X est transverse aux niveaux des fonctions $z, x^2 + y^2$ et y/x sur le cylindre $C_\varepsilon \setminus \Gamma$.*

Preuve. Un petit calcul (voir encore [Tak]) montre qu'il existe un changement de coordonnées dépendant de z du type

$$u = (x, y) \mapsto (A_0 + zA_1 + \cdots + z^q A_q)(u), \quad A_i \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

qui permet d'écrire les L_i pour $i = 0, 1, 2, \dots, q$, sous la forme:

$$L_i(x, y) = (\alpha_i x - \beta_i y) \frac{\partial}{\partial x} + (\beta_i x + \alpha_i y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{avec } \beta_0 \neq 0.$$

Dans ces coordonnées on peut supposer (compte tenu de la condition $V(0, z) \equiv 0$) que:

$$\langle u, \frac{du}{dz} \rangle = \frac{dr^2}{dz} = -\frac{r^2}{z^{q+1}} (\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_q z^q) + r^2 \varphi(u, z)$$

avec $|\varphi(u, z)| < 1$ pour $(u, z) \in C_\varepsilon$. Montrons tout d'abord que l'hypothèse, il existe γ_0 ayant un contact plat avec $\{x = y = 0, z > 0\}$, implique l'existence de $j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tel que $\alpha_i = 0$ si $i < j$ et $\alpha_j < 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas et étudions l'équation différentielle vérifiée par $r_0^2(z) = x_0^2(z) + y_0^2(z)$, où $\underline{\gamma}_0(z) = (x_0(z), y_0(z), z)$ est une réparamétrization de γ_0 par la hauteur z . On a alors trois possibilités

i) $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0, \alpha_j > 0$ avec $j \leq q$. On a alors pour z assez petit, $\frac{dr_0^2}{dz}(z)$ strictement négatif, ce qui contredit $\omega(\gamma_0) = 0$.

ii) $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-1} = 0, \alpha_q < 0$. Pour z assez petit on a $\frac{1}{r_0^2(z)} \frac{dr_0^2(z)}{dz} > \frac{a}{z}$ avec $a = -\frac{\alpha_q}{2}$. On en déduit $r_0^2(z) > Az^a$ avec $A > 0$ et alors γ_0 n'a pas un contact plat avec Γ .

iii) $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$. On voit que $r_0(z)$ ne tend pas 0 si $z \rightarrow 0$.

Soit $\alpha = -\alpha_j > 0, s = q - j \geq 1$. On peut écrire

$$\frac{dr^2}{dz} = \frac{\alpha r^2}{z^{s+1}} (1 + z\Psi(u, z))$$

où Ψ est bornée sur C_1 . Il existe $\varepsilon, a > 0$ tels que $0 < \frac{dr^2}{dz} < sa \frac{r^2}{z^{s+1}}$ si $(u, z) \in C_\varepsilon$. Le cylindre C_ε est positivement invariant par X et pour toute demi-courbe intégrale $\underline{\gamma}(z) = (x(z), y(z), z), r^2(z) = x^2(z) + y^2(z)$ on a

$$0 < \frac{1}{r^2(z)} \frac{dr^2(z)}{dz} < \frac{sa}{z^{s+1}}.$$

On en déduit $r^2(z) < A \exp(-az^s)$. Ainsi $\omega(\gamma) = 0$ et γ a un contact plat avec $\{x = y = 0, z > 0\}$. Pour terminer la preuve de la proposition remarquons que l'on a

$$(x^2 + y^2)^{-1}(xdy - ydx)(X) = 2\beta_0(1 + zf(x, y, z))$$

où f est bornée sur C_1 . Ainsi pour $\varepsilon > 0$ assez petit toute demi-courbe intégrale γ d'origine un point de $C_\varepsilon \setminus \Gamma$ coupe transversalement les niveaux de y/x . De plus, l'équation différentielle ci-dessus montre que la projection de γ sur $z = 0$ spirale autour de 0. D'après le corollaire I.3, Γ est un axe de spiralement de γ . \square

Proposition 2.2. *Soit (X, p) une singularité spiralante réduite, non asymptotiquement monodromique d'axe $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ telle que, dans des coordonnées adaptées (x, y, z) , $C_\varepsilon = \{x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \varepsilon\}$ soit un domaine de tourbillonnement de X . De plus X est transverse aux niveaux des fonctions $x^2 + y^2$ et z sur $C_\varepsilon \setminus \Gamma$.*

Preuve. Soit γ_0 la demi-courbe intégrale de X qui spirale autour de Γ . Puisque $\omega(\gamma_0) = \{0\}$, la valeur propre $\lambda = \bar{\lambda}$ est strictement négative. Quitte à multiplier X par une constante et à effectuer un changement de coordonnées linéaire en (x, y) on peut écrire

$$L_0 = -\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) + \delta x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{avec } \delta = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = 1.$$

L'équation différentielle vérifiée par $r^2(z) = x^2(z) + y^2(z)$, où $\underline{\gamma}(z) = (x(z), y(z), z)$, est la réparamétrization d'une courbe intégrale γ , s'écrit:

$$\frac{dr^2}{dz} = \frac{r^2}{z^{q+1}} \varphi(x(z), y(z), z)$$

où $0 < a < \varphi(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in C_\varepsilon$. Les arguments de la preuve de la proposition précédente montrent immédiatement que C_ε est positivement invariant par X , que toute demi-courbe intégrale $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, avec $\gamma(0) \in C_\varepsilon$, a un contact plat avec Γ en 0 et que X est transverse aux niveaux de $x^2 + y^2$ et de z . Pour montrer qu'une telle demi-courbe est oscillante considérons l'éclatement polaire de $x = y = 0$ avec les notations suivantes:

$$\begin{aligned} \pi : S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \pi(\underline{x}, r, z) &= (r\underline{x}, z), \\ D^* &= \pi^{-1}(\{x = y = 0\}), C_\varepsilon^* &= \pi^{-1}(C_\varepsilon), X^* &= \pi_*^{-1}(X). \end{aligned}$$

Le diviseur D^* est une variété centrale globale de X^* , le relevé de X par π . L'assertion suivante est plus ou moins classique. \square

Assertion sur la variété centrale. *Soit γ^* une demi-courbe intégrale positive de X^* (maximale) d'origine $\gamma^*(0) \in C_\varepsilon^*$. Il existe une unique courbe intégrale*

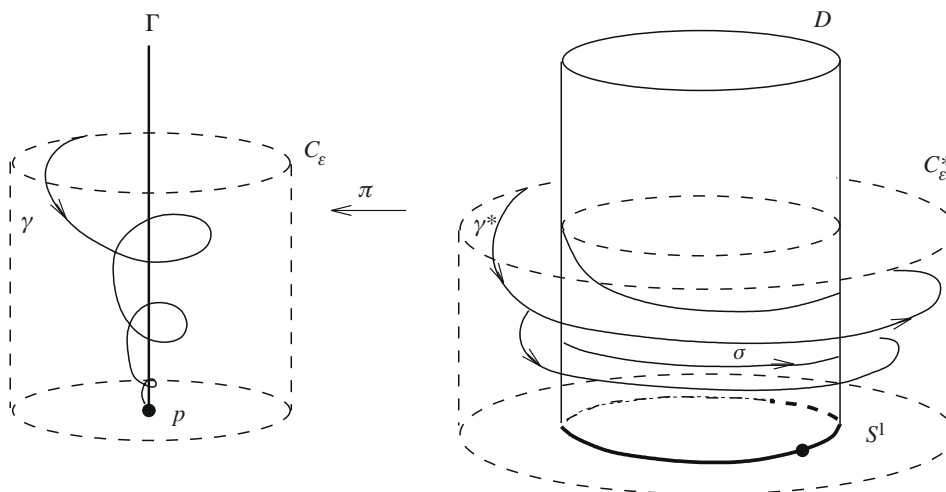


Figure 7.

maximale positive σ de X^* contenue dans $D^* \cap C_\varepsilon^*$ telle que la distance de $\gamma^*(t)$ à $\sigma(t)$ soit bornée par $C \exp(-at)$ pour $t \geq 0$ où $a, C > 0$. On dit alors que σ est la courbe accompagnatrice de γ^* .

Soit maintenant $\gamma_0^* = \pi^{-1} \circ \gamma_0$ où γ_0 spirale autour de Γ et soit σ_0 sa courbe accompagnatrice. Un argument de la preuve de la proposition du paragraphe précédent montre que $\omega(\gamma_0^*) = \omega(\sigma_0) = \pi^{-1}(p) \simeq S^1$. Le cercle $\pi^{-1}(p)$ est un cycle limite de $X^*|_{D^*}$ et $\omega(\sigma) = \pi^{-1}(p)$ pour toute courbe intégrale dans $C_\varepsilon^* \cap D^*$. Soit γ tel que $\gamma(0) \in C_\varepsilon$, $\gamma^* = \pi^{-1} \circ \gamma$ et soit σ la courbe accompagnatrice de γ^* . Alors, d'après l'assertion, $\omega(\gamma^*) = \omega(\sigma) = \pi^{-1}(p)$ et ainsi γ est oscillante par rapport au plan $x = 0$. On conclut en appliquant le théorème 1. \square

Preuve de l'assertion. Cette preuve reprend des arguments de [Ke] et nous n'en donnerons que les grandes lignes. Compte tenu de l'écriture de X dans des coordonnées adaptées on peut écrire (modulo un changement de temps):

$$X^* = \left(a(\underline{x}) + A(\underline{x}, r, z) \right) \frac{\partial}{\partial \underline{x}} + \left(b(\underline{x})r + rB(\underline{x}, r, z) \right) \frac{\partial}{\partial r} - z^{q+1} \frac{\partial}{\partial z}$$

où les restrictions de A, B à $S^1 \times \{0\} \times \{0\}$ sont nulles et $b(\underline{x}) < b_1 < 0$ si $\underline{x} \in S^1$. Notons que $D_\varepsilon^* = D^* \cap C_\varepsilon^*$ est positivement invariant par X^* . Plus précisément toute demi-courbe intégrale σ de X^* issue d'un point de D_ε^* est définie sur $[0, \infty[$ et $\omega(\sigma)$ est contenu dans $D^* \cap \{z = 0\}$. Soient γ^*, σ des demi-courbes intégrales de X^* d'origines respectives $(\underline{x}_0, r_0, z_0), (\underline{x}_1, 0, z_0)$. Alors $v(t) = \gamma^*(t) - \sigma(t) = (\underline{x}(t), p(t), 0)$, $t > 0$, est solution de l'équation différentielle E sur $S^1 \times [0, 1[$, dépendant du temps obtenue en écrivant $v'(t) = X^*(\gamma^*(t)) - X^*(\sigma(t))$. En écrivant

que $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) < \frac{1}{2} b_1 \underline{x}(t)$, on peut utiliser la méthode classique d'approximations successives pour obtenir $v(t)$ comme point fixe de l'opérateur intégro-différentiel déduit de E . L'existence de la solution $\sigma : t \mapsto \sigma(t)$ cherchée et de la majoration associée s'en déduisent. \square

3. *Fin de la preuve du théorème 2.* Dans tout ce paragraphe, Γ désigne un axe de spiralement en p , non dégénéré, pour une demi-courbe intégrale γ_0 de X . Nous prouverons le théorème en nous ramenant au cas réduit tout d'abord pour une singularité élémentaire et ensuite dans le cas général en effectuant des éclatements de points, de courbes et, éventuellement, une ramification. Nous utiliserons le résultat du paragraphe précédent sous la forme suivante. *Si (x, y, z) sont des coordonnées adaptées à une singularité réduite spiralante (X, p) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C_\varepsilon = \{x^2 + y^2 < 1, 0 \leq z < \varepsilon\}$ soit un domaine de tourbillonnement. De plus X est transverse aux niveaux de $x^2 + y^2$ sur $C_\varepsilon \setminus \Gamma$.*

Proposition 3.1. *Soit (X, p) une singularité élémentaire qui possède un axe de spiralement Γ non dégénéré (pour une courbe intégrale γ_0) transverse à une hypersurface lisse D et soit $((x_0, y_0, z_0), U)$ une carte affine en p telle que $D = \{z_0 = 0\}$ et $\Gamma \subset \{z_0 > 0\}$. Alors Γ est un axe de tourbillonnement de X qui possède un domaine de tourbillonnement V semi algébrique dans les coordonnées (x_0, y_0, z_0) .*

Preuve. D'après la proposition du paragraphe 1, l'axe Γ est lisse et $\mu(\Gamma) = 0$. Il existe un changement de coordonnées du type $x = x_0 + \varphi(z)$, $y = y_0 + \psi(z)$, $z = z_0$ tel que $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$. Soit $q + 1$ l'ordre en z de la restriction de X à Γ . On a

$$X = a(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + (-z^{q+1} + c(x, y, z)) \frac{\partial}{\partial z}$$

où $a(0, 0, z) = b(0, 0, z) = 0$, ordre $c(0, 0, z) > q + 1$ et $DX(0)$ n'est pas nilpotente. Si $TI(\Gamma) = \{p_i\}$, notons π le composé des $q + 1$ éclatements de centres p, p_1, \dots, p_q et soit $((x', y', z), U')$ une carte affine en p_q telle que $x' = xz^{q+1}$, $y' = yz^{q+1}$. Dans ces coordonnées le relevé X' de X s'écrit

$$X' = \sum_{i=0}^q z^i L_i + z^{q+1} \left(h \frac{\partial}{\partial z} + \tilde{X}' \right)$$

où les L_i et \tilde{X}' sont comme dans la définition des coordonnées adaptées au cas réduit spiralant et $h(0) < 0$. Ainsi (x', y', z) sont des coordonnées adaptées au champ $h^{-1}X'$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C_\varepsilon = \{x'^2 + y'^2 < 1, 0 < z < \varepsilon\}$ soit un domaine de tourbillonnement de X' . De plus X' est transverse aux cylindres $\{x'^2 + y'^2 = r^2, |z| < \varepsilon\}$ pour $r \leq 1$. Si $\alpha(z), \beta(z)$ sont des fonctions qui ont un ordre assez élevé en z , il existe ε' tel que

$$C_{\varepsilon'}(\alpha, \beta) = \{(x' + \alpha(z))^2 + (y' + \beta(z))^2 < 1, 0 < z < \varepsilon'\}$$

soit un domaine de tourbillonnement de (X', p') . Sa projection

$$\pi(C'_\varepsilon(\alpha, \beta)) = \{(x + z^{q+1}\alpha(z))^2 + (y + z^{q+1}\beta(z))^2 < z^{q+1}, \quad 0 < z < \varepsilon'\}$$

est un domaine de tourbillonnement de (X, p) . Ecrivons $\varphi(z) = \varphi_s(z) + f_s(z)$, $\psi(z) = \psi_s(z) + g_s(z)$ où φ_s, ψ_s sont les jets d'ordre s de φ, ψ . Pour s assez grand

$$V = \{(x - f_s(z))^2 + (y - g_s(z))^2 < z^{q+1}, \quad 0 < z < \varepsilon'\}$$

est un domaine de tourbillonnement de (X, p) qui est semi algébrique dans les coordonnées initiales (x_0, y_0, z_0) puisque $x - f_s(z) = x_0 + \varphi_s(z)$, $y - g_s(z) = y_0 + \psi_s(z)$. \square

Proposition 3.2. *Supposons que Γ soit un axe de spiralement non dégénéré en p pour la demi-courbe intégrale γ_0 de X . Notons $TI(\Gamma) = \{p_i\}$, π_i l'éclatement de centre p_{i-1} , $\Gamma_i = \pi_i^{-1}(\Gamma_{i-1})$, et $((x, y, z), U)$ une carte affine en p . Il existe $k \geq 0$ et des coordonnées (x_k, y_k, z_k) en p_k telles que le relevé de X en p_k s'écrit $X_k = z_k^{s_k} X'_k$ avec $DX'_k(p_k) \neq 0$ et $\Gamma_k \subset \{z_k > 0\}$ est lisse transverse à $\{z_k = 0\}$. De plus $\pi_1 \circ \pi_2 \cdots \circ \pi_k$ s'écrit algébriquement dans les coordonnées $(x, y, z), (x_k, y_k, z_k)$.*

Preuve. Pour i assez grand, Γ_i est lisse, transverse au diviseur exceptionnel (qui est lisse en p_i). Sa tangente est une direction propre de $DX(p_i)$ associée à une valeur propre $\mu(\Gamma_i) = 0$. On peut (modulo ces i premiers éclatements) choisir des coordonnées (x', y', z') telles que $\Gamma = \{x' = y' = 0, z' > 0\}$, i.e que

$$X = a \frac{\partial}{\partial x'} + b \frac{\partial}{\partial y'} + c \frac{\partial}{\partial z'} \quad \text{avec} \quad a(0, 0, z') = b(0, 0, z') \equiv 0$$

et $c(0, 0, z')$ est d'ordre $d > 1$ en z' . Soient $(x'_1 = x/z', y_1 = y/z', z'_1 = z')$ des coordonnées en p_1 . Alors si $DX(p) \equiv 0$ il existe $s_1 > 0$ tel que $X_1 = z^{s_1} X'_1$ où

$$X'_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + b_1 \frac{\partial}{\partial y'_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} \quad \text{avec} \quad a_1(0, 0, z'_1) = b_1(0, 0, z'_1) = 0$$

et $c(0, 0, z'_1)$ est d'ordre $d_1 < d$. Ainsi, il existe $k \geq 0$ et des coordonnées (x'_k, y'_k, z'_k) en p_k telles que les conclusions de la proposition soient vérifiées. La carte affine $((x, y, z), U)$ étant fixée, on peut évidemment choisir une carte affine $((x_k, y_k, z_k), U_k)$ en p_k telle que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_k$ soit algébrique et le diviseur exceptionnel soit $z_k = 0$. \square

Si $DX'_k(p_k)$ n'est pas nilpotente, il existe, d'après la proposition 3.1 un domaine de tourbillonnement V_k de Γ_k pour (X_k, p_k) semi algébrique dans la carte $((x_k, y_k, z_k), U_k)$. D'après le théorème de Tarski sa projection par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_k$ est semi

algébrique dans les coordonnées (x, y, z) . C'est un domaine de tourbillonnement d'axe Γ pour (X, p) .

Si $DX'_k(p_k)$ est nilpotente, compte tenu de l'algébricité de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_k$, la proposition suivante achève clairement la preuve du théorème 2.

Proposition 3.3. *Supposons que $DX(p) \neq 0$ soit nilpotente, que Γ soit un axe de spiralement en p non dégénéré, lisse, pour une demi-courbe intégrale γ_0 de X et que $((x_0, y_0, z_0), U_0)$ soit une carte affine en p telle que $\Gamma \subset \{z_0 > 0\}$ soit transverse à $\{z_0 = 0\}$. Alors, Γ est un axe de tourbillonnement de X qui possède un domaine de tourbillonnement semi algébrique dans les coordonnées (x_0, y_0, z_0) .*

Preuve. Soient (x, y, z) des coordonnées en p telles que $z = z_0$, $x = x_0 - \varphi(z)$, $y = y_0 - \psi(z)$, où $\Gamma = \{x_0 = \varphi(z), y_0 = \psi(z), z > 0\}$. Quitte à effectuer les éclatements de centres $p, p_1, \dots, p_q \in TI(\Gamma)$, on peut supposer que, dans ces coordonnées,

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^q z^i L_i(x, y) + z^{q+1} \left(-\frac{\partial}{\partial z} + V \right)$$

où $L_i(x, y) = (\alpha_i x + \beta_i y) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma_i x + \delta_i y) \frac{\partial}{\partial y}$, $V = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ avec $a(0, 0, z) = b(0, 0, z) \equiv 0$ et $q > 0$ puisque γ_0 a un contact plat avec Γ . Distinguons deux cas.

1^{er} cas, $\gamma_1 = 0$. Soit $\pi : M' \rightarrow U_0 \cong \mathbb{R}^3$ l'éclatement de centre la droite $\Delta = \{y = z = 0\}$. Notons que Δ a un sens intrinsèque, c'est le lieu singulier de X dans le diviseur. En particulier c'est une courbe algébrique dans les coordonnées initiales. Soient $\Gamma' = \pi^{-1}(\Gamma)$, $\gamma'_0 = \pi^{-1} \circ \gamma_0$ et soient $(x' = x, y' = y/z, z' = z)$ des coordonnées au point $p' = \omega(\Gamma')$. Dans ces coordonnées si X' est le relevé de X par π on a

$$X'' = (z')^{-1} X' |_{z'} = \sum_{i=0}^q z'^i L'_i + z'^{q'} \left(-\frac{\partial}{\partial z'} + V' \right)$$

où $q' = q - 1$, les L'_i, V' sont comme plus haut et

$$L'_0(x', y') = (\alpha_1 x' + y') \frac{\partial}{\partial x'} + (\gamma_2 x' + \delta_1 y') \frac{\partial}{\partial y'}$$

Puisque Γ' est un axe de spiralement non dégénéré de la courbe intégrale γ'_0 de X'' on a encore $q' > 1$. Si $DX''(p') = DL'_0(0)$ n'est pas nilpotente, (X'', p') est une singularité réduite spiralante et les coordonnées (x', y', z') lui sont adaptées. D'après les propositions 2.1, 2.2 le cylindre $C'_\varepsilon = \{x'^2 + y'^2 < 1, 0 < z' < \varepsilon\}$ est un domaine de tourbillonnement d'axe Γ' pour (X'', p') . Par le même argument que dans la preuve de la proposition 3.1 on montre l'existence d'un domaine de tourbillonnement $V' \subset C'_\varepsilon$ d'axe Γ' pour (X', p') dont la projection par les morphismes d'éclatement effectués est un domaine de tourbillonnement d'axe Γ

pour (X, p) , semi algébrique dans les coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Si $DX''(p')$ est nilpotente on conclut immédiatement en raisonnant par récurrence sur q puisque $q' = q - 1 > 1$.

2^{ème} cas, $\gamma_1 \neq 0$. Soit π' le composé de la ramification $(x, y, z') \rightarrow (x, y, z'^2)$ par l'éclatement de centre $\{y = z' = 0\}$. Posons $\Gamma' = \pi'^{-1}(\Gamma)$, $\gamma'_0 = \pi'^{-1} \circ \gamma_0$ et soient $(x' = x, y' = y/z'^2, z')$ des coordonnées en $p' = \omega(\Gamma')$. Si X' est le relevé de X par π' on a

$$X'' = (z'^{-1})X' = \sum_{i=0}^q z'^i L_i + z'^{2q} \left(-1/2 \frac{\partial}{\partial z'} + V' \right)$$

avec $L'_0 = y' \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma_1 x' \frac{\partial}{\partial y'}$. Puisque $DX''(p') = DL'_0(0)$ n'est pas nilpotente, (X'', p') est une singularité réduite spirale. On conclut alors comme dans le cas $\gamma_1 = 0$. \square

4. Preuve du corollaire de finitude

Soit p un point singulier de X . Nous pouvons clairement supposer que $\dim \text{Sing } X \leq 1$. Ainsi $\text{Sing } X \setminus \{p\}$ est une union finie de demi-branches analytiques. L'ensemble des axes de spiralement de X en p contenus dans $\text{Sing } X$ est fini. Pour montrer que l'ensemble des axes de tourbillonnement non dégénérés est localement fini nous utiliserons un résultat "*d'uniformisation locale*" des champs vecteurs en dimension trois démontré dans [Ca]. Le résultat s'énonce en termes d'existence d'une stratégie gagnante pour un jeu à la Hironaka [Hi₂] que nous rappelons.

Soit X un germe en p de champ de vecteurs analytique sur une variété de dimension trois. Deux joueurs A, B jouent au jeu suivant qui comporte deux étapes:

1) Le joueur A choisit un centre d'éclatement Y qui est soit le point p soit une (un germe de) courbe lisse en p . On fait l'éclatement $\pi_1 : M_1 \rightarrow M_0 = M$ et on considère X_1 le transformé strict de X (relevé divisé).

2) Le joueur B choisit un point $p_1 \in \pi^{-1}(p)$ tel que p_1 n'est pas une singularité élémentaire de X_1 . S'il ne peut pas choisir un tel p_1 , le jeu s'arrête et le "*joueur A a gagné*". Sinon on germifie la situation en p_1 et le jeu recommence avec X_1 .

Une "*stratégie gagnante*" pour A est un critère de choix des centres d'éclatement tel que, toute réalisation du jeu (partie) respectant ce critère soit finie. Le résultat d'uniformisation s'énonce alors : *Il existe une stratégie gagnante pour A et les longueurs de toutes les réalisations possibles (à partir de (X, p)) sont uniformément bornées.*

Prouvons le corollaire en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite infinie $\{\Gamma_n\}$ d'axes de tourbillonnement non dégénérés pour X tels que la suite $\{q_n\} = \{\omega(\Gamma_n)\}$ converge vers p et $\Gamma_n \neq \text{Sing } \Gamma_{n'}$ si $n \neq n'$. Initiions le jeu d'Hironaka avec le choix de Y . Notons que les (Γ_n, q_n) et (Y, q_n) sont distincts pour n assez grand. En effet, si ce n'est pas le cas, pour n assez grand on a

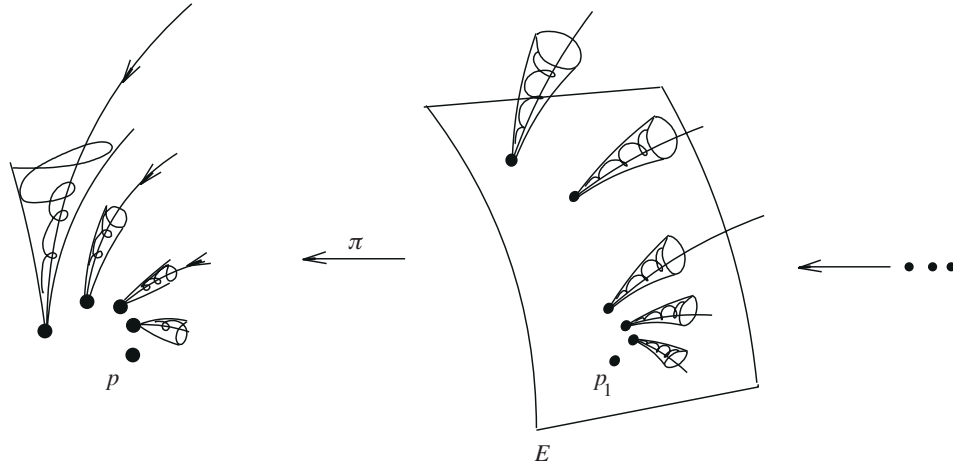


Figure 8.

$q_n \neq q_{n'}$ et puisque les q_n appartiennent à $\text{Sing } X \cap Y$, on a $Y \subset \text{Sing } X$. Ce qui contredit l'hypothèse $\Gamma_n \not\subset \text{Sing } X$. Soit alors $\pi_1 : M_1 \rightarrow M$ l'éclatement de centre Y . Notons $\Gamma_{n,1}$ le transformé strict de Γ_n et $q_{n,1} = \omega(\Gamma_{n,1})$. Puisque π_1 est un morphisme propre, quitte à choisir une sous suite des $\{\Gamma_n\}$, on peut supposer que $\{q_{n,1}\}$ converge vers un point $p_1 \in \pi^{-1}(p)$. Le joueur B choisit le point p_1 . En répétant ce type de choix pour le joueur B un nombre fini de fois on obtient une singularité élémentaire p_k qui ne vérifie pas la conclusion du corollaire du paragraphe II. \square

5. Coordonnées adaptées et équilibrées

Soit Γ un axe de tourbillonnement non dégénéré, lisse de X en un point p . Le but de ce dernier paragraphe est de montrer que la dynamique de X induite sur un domaine de tourbillonnement bien choisi V de Γ est équilibrée au sens suivant: il existe une carte affine $((x, y, z), U)$ en p telle que l'on ait:

$$\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}, \quad V = \{x^2 + y^2 < z^n, 0 < z < \varepsilon\}$$

et telle que X soit transverse aux niveaux de $x^2 + y^2$, z et y/x sur $V \setminus \Gamma$. En particulier la "rotation autour de Γ " serait strictement monotone autour de Γ .

Proposition. *Si (X, p) est une singularité réduite spiralante, il existe des coordonnées (x, y, z) adaptées à (X, p) telles que $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$ soit un axe de tourbillonnement de domaine de tourbillonnement C_ε et telles que X soit transverse aux niveaux de $x^2 + y^2$, z et y/x sur $C_\varepsilon \setminus \Gamma$.*

D'après les propositions 2.1, 2.2, nous devons seulement prouver que nous pouvons choisir des coordonnées adaptées (x, y, z) telles que X soit transverse au feuilletage

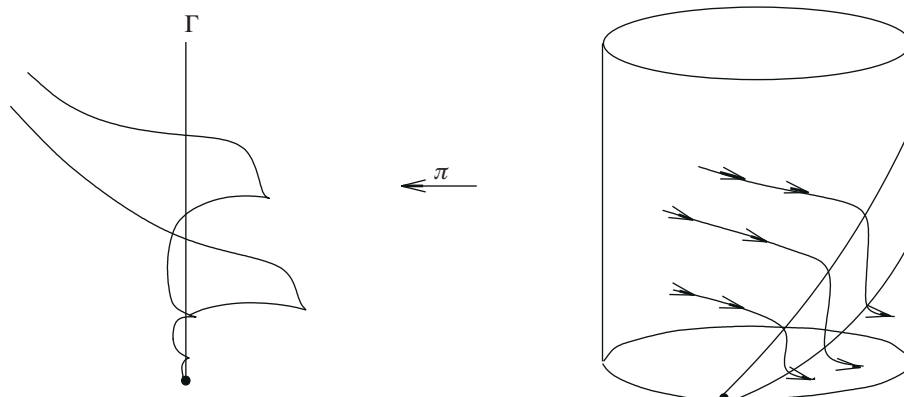


Figure 9.

$ydx - xdy = 0$ dans le cas non asymptotiquement monodromique. Avant d'aborder cette preuve, examinons tout d'abord l'exemple suivant:

$$X = -\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) + y \frac{\partial}{\partial x} - (3yz + 2xz^2) \frac{\partial}{\partial y} - z^2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Notons tout d'abord que X n'est pas transverse au feuilletage $x dy - y dx = 0$. En effet, la fonction $(x dy - y dx)(X)$ s'annule sur les surfaces $y = -xz$, $y = -2xz$. Montrons que $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$ est un axe de tourbillonnement. Soient π l'éclatement de centre $\{x = y = 0\}$ et D son diviseur exceptionnel. Le relevé X' de X possède un seul point singulier $p' \in \pi^{-1}(0)$. Soient $x' = x$, $y' = y/x$, $z' = z$ des coordonnées centrées en ce point. On a

$$Y = X'|_D = -(y'^2 + 3z'y' + 2z'^2) \frac{\partial}{\partial y'} - z'^2 \frac{\partial}{\partial z'}.$$

D'après la preuve de la proposition 2.2 il suffit de montrer qu'il n'existe pas de courbe σ de $Y|_{\{z>0\}}$ telle que $\omega(\sigma) = \{p'\}$. Or $\{z = 0\}$ est la seule direction réelle du cône tangent à Y en p' et en éclatant ce point on obtient le résultat cherché. Faisons le changement de coordonnées $y^* = y' + 3/2z'$ qui correspond au changement $y^* = y + 3/2xz$ à l'origine de \mathbb{R}^3 . Le champ Y s'écrit alors

$$Y = -\{y'^{*2} + 5/4 z'^2\} \frac{\partial}{\partial y'^*} - z'^2 \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Il est transverse aux niveaux de $y'^* = cste$ lorsque $z' \neq 0$. On en déduit que X est transverse au feuilletage $y^* dx - x dy^* = 0$.

Preuve de la proposition. D'après la définition des coordonnées adaptées on a

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} z^i L_i + z^{q+1} \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \tilde{X}\right), \quad q > 1 \text{ et } \nu_{x,y}(\tilde{X}) \geq 2.$$

De plus X n'étant pas asymptotiquement monodromique on a $L_0 = -R$ ou $L_0 = -R + y \frac{\partial}{\partial x}$ avec $R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$. Notons comme dans l'exemple ci-dessus π l'éclatement de centre $\{x = y = 0\}$, D le diviseur exceptionnel et $Y = X' |_D$. Puisque $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$ est un axe de tourbillonnement de X on sait d'après la preuve de la proposition 2.2 que:

(*) Si σ est une courbe intégrale de Y avec $\sigma(0) \in \pi^{-1}\{z > 0\}$, on a $\omega(\sigma) = \pi^{-1}(0) = F \simeq S^1$.

(**) Les singularités simples obtenues par réduction des singularités du feuilletage \mathcal{L} défini par Y sur D sont des "coins" (points de croisement du diviseur exceptionnel) ou des points du transformé strict de F .

Notons t le premier indice i tel que $L_t \neq \alpha_t R$. Si $t > q$, la fibre F n'est pas invariante par \mathcal{L} , ce qui contredit (*). Si $t = q$, le feuilletage \mathcal{L} possède une singularité simple sur F , ce qui contredit encore (*). Posons

$$\tilde{L}_t = L_t - \alpha_t R = \beta_t y \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma_t x + \tilde{\delta}_t y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

On peut supposer que L_t est écrite sous forme de Jordan. C'est-à-dire que l'on a: soit $\tilde{L}_t = \tilde{\delta}_t y \frac{\partial}{\partial y}$ avec $\tilde{\delta}_t \neq 0$, soit $\tilde{L}_t = \beta_t \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ avec $\beta_t \neq 0$, soit $\tilde{L}_t = y \frac{\partial}{\partial x}$. Le premier cas contredit (*) car \mathcal{L} a une singularité simple sur F . Dans le second cas, \mathcal{L} n'a pas de singularité sur F et il est clair que X est transverse au feuilletage $ydx - ydy = 0$. Etudions le troisième cas, $\tilde{L}_t = y \frac{\partial}{\partial x}$. Dans les coordonnées $(x, y' = y/x, z)$ le champ Y s'écrit:

$$Y = z^t \{ (a(z)y'^2 + b(z)y' + c(z))\partial/\partial y' - z^{q'} z \partial/\partial z \}, \quad q' = q - t$$

$$a(z) = -1 - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{t+i} z^i, \quad b(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\delta}_{t+i} z^i, \quad c(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{t+i} z^i.$$

Soit $N(y')$ le nuage de points de $Y(y')/z^t$ et $\Delta(y')$ le polygône de Newton de $N(y') \cup \{(q', 1)\}$. Le premier sommet de $\Delta(y')$ est $(0, 2)$ et si $-1/d(y')$ est sa pente, alors $d(y') \leq q'$. En suivant une méthode de préparation inspirée d'Hironaka [Hi₂], nous dirons que la coordonnée y' est équilibrée si l'une des propriétés suivantes arrive:

- i) Le deuxième sommet du premier côté est $(d(y'), 1)$ ou $d(y') \notin \mathbb{Z}$.
- ii) La pente $d = d(y') \in \mathbb{Z}$, le deuxième sommet est $(2d, 0)$, le point $(d, 1) \notin N(y')$ et il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que si $y'^* = y' + \lambda z^d$, alors soit $d(y'^*) > d(y')$, soit la longueur du premier segment décroît strictement.

Le changement $y' \mapsto y'^*$ correspond à $y \mapsto y + \lambda x z^d$ qui est algébrique et conserve le caractère adapté des coordonnées. Après un nombre fini de changements de ce type, on peut supposer que y' est équilibrée. Montrons que les coordonnées

choisies sont déjà bonnes. Elles possèdent déjà la propriété suivante de contact maximal.

“Soit $p' = p_0$ l'origine de la carte (y', z) de D , alors $p_0 \in \text{Sing } \mathcal{L}$ et $d_0 = d(y') \geq 1$. Eclatons p_0 et soit p_1 le point qui correspond au transformé strict de $y' = 0$. On a des coordonnées $(y'_1 = y'/z, z)$ en p_1 . Alors la coordonnée y'_1 est équilibrée par rapport au transformé Y_1 de Y . De plus $d(y'_1) = d(y') - 1$, $q'_1 = q' - 1$ et le nouveau polygône $\Delta(y'_1)$ s'obtient en appliquant la transformation linéaire $(u, v) \mapsto (u + v - 2, v)$ à $\Delta(y')$ ”.

En itérant cette procédure on voit que le cas i) n'arrive pas sinon on a une singularité simple sur le transformé strict d'une courbe du type $y'^2 - z^{2d+1} = 0$ ou sur le transformé strict de $y' = 0$, ce qui contredit (**). Etudions le cas ii) en posant $f(x, y, z) = xX(y) - yX(x)$,

$$f(x, y, z) = \{a(z)y^2 + b(z)yx + c(z)x^2 + z^{q'+1}(x\tilde{X}(y) - y\tilde{X}(x))\} z^t.$$

Comme l'ordre de $x\tilde{X}(y) - y\tilde{X}(x)$ est ≥ 3 en x, y , pour montrer que $f(x, y, z)$ garde un signe constant sur la région qui nous intéresse, il suffit de montrer que le discriminant $A(z) = b(z)^2 - 4a(z)c(z)$ est strictement négatif pour $0 < z \ll 1$. Comme y' est équilibrée, on sait que $\nu(b(z)) > d$ et que $A(z) = \gamma z^{2d} + z^{2d+1}(\dots)$ où $\gamma < 0$ si $d < q'$ et $\gamma < -q'$ si $d = q'$. On a toujours $\gamma < 0$ et $A(z) < 0$ pour $0 < z \ll 1$. Ceci termine la démonstration. \square

Bibliographie

- [A-H-V] J.-M. Aroca, A. Hironaka and J.-L. Vicente, Introduction to the Theory of Infinitely Near Singular Points. *Mem. Math. Inst. Jorge Juan* **28** Madrid CSIC (1977).
- [Bo] E. Borel, Mémoire sur les Séries Divergentes. *Ann. Sci. de l'E.N.S.*, 3^{ème} série, t. **16** (1899), 521-568.
- [Bon-Du] P. Bonckaert and F. Dumortier, Smooth invariant curves for germs of vector fields in \mathbb{R}^3 whose linear part generates rotations. *Journ. Diff. Eq.* **62** (1986), 95-116.
- [Br] M. Brunella, Instability of Equilibria in Dimension Three. *Ann. Inst. Fourier* **48**(5) (1998), 1345-1357.
- [Ca] F. Cano, *Desingularization Strategies for a Three-dimensional Vector Field*. Lect. Notes in Math. n°1259. Springer-Verlag (1987).
- [Ha] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*. Pure and Applied Mathematics. XXI. Wiley-Interscience 1969.
- [Hi₁] H. Hironaka, *Introduction to Real Analytic Sets and Real Analytic Maps*. Istituto Matematico “L. Tonelli”, Pisa 1973.
- [Hi₂] H. Hironaka, Characteristic Polyhedra of Singularities. *J. of Math. of Kyoto Univ.*, **7**(3) (1968), 251-293.
- [Hi-P-S] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*. Lect. Notes in Mathematics, 583. Springer Verlag (1977).
- [Hu] Lin Hu Xing, Sur la structure des champs de gradients de fonctions analytiques réelles. Thèse Paris VII (1992).
- [Ke] A. Kelley, Stability of the Center-Stable Manifold. *J. Math. Anal. Appl.* **18** (1967), 336-344.

- [Kh] A. Khovanskii, Real analytic Varieties with the Finiteness Property and Complex Abelian Integrals. *Funct. Anal. And Appl.* **18** 119-127.
- [Lo₁] S. Lojasiewicz, Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. Colloques Internationaux du C.N.R.S. n° 117, les équations aux dérivées partielles, Paris 25-30 juin (1962) 87-89.
- [Lo₂] S. Lojasiewicz, Ensembles semi-analytiques. Séminaire E.C. Zeeman, Seminar on Combinatorial Topology I.H.E.S. p.92.
- [Ly] A. M. Lyapunov, *Stability of Motion*. Math. in Science and Engineering, **30**, Academic Press (1966).
- [Me-Pa] J. de Melo and J. Palis, *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag (1982).
- [No-Ya] D. Novikov and S. Yakovenko, Trajectories of polynomial vector fields and ascending chains of polynomial ideals. *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 563-609.
- [Po] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. de Math.* **7** (3) (1881).
- [Sa] F. Sanz, Sur les trajectoires d'un champ de gradient. *Ann. Inst. Fourier* **48** (4) (1998), 1045-1067.
- [Se] A. Seidenberg, Reduction of Singularities of the differentiable equation $AdY = BdX$. *Am. J. of Math.* (1968), 248-269.
- [Ta] A. Tarski, *A Decision Method For Elementary Algebra and Geometry*. Berkeley and Los Angeles (1951).
- [Tak] F. Takens, Singularities of Vector Fields. *Publ. Math. IHES* **43** (1974), 48-100.
- [Th₁] R. Thom, Gradients of analytic functions. Proceedings of Seventh National Mathematics Conferences p. 364-371 Azarabadegan Univ. Tabriz 1977 (D.R.J. Chillingworth).
- [Th₂] R. Thom, Limit set of leaves of analytic foliations. Notes manuscrites (1980).

F. Cano
 Dpto. Algebra, geometria y topologia
 Facultad de Ciencias
 E-47005 Valladolid
 Spain
 e-mail: fcano@cpd.uva.es

F. Sanz
 Dpto. Algebra, geometria y topologia
 Facultad de Ciencias
 E-47005 Valladolid
 Spain
 e-mail: fsanz@agt.uva.es

R. Moussu
 Université de Bourgogne
 Lab. Topologie, CNRS UMR 5584
 Dép. Mathématiques
 B. P. 400
 F-21011-Dijon Cedex
 France
 e-mail: rmoussu@u-bourgogne.fr

(Received: December 12, 1998)