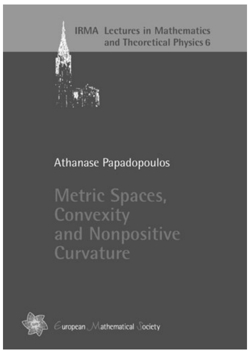
heitskreis für einen beträchtlichen Zeitabschnitt werden.

Chemnitz B. Silbermann



A. Papadopoulos
Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature
IRMA Lect. in Math. and Theor. Physics 6

Zürich, Europ. Math. Soc., 2005, 287 S., € 48,–

Ein zentrales Thema der modernen metrischen Geometrie ist die Verallgemeinerung geometrischer Begriffsbildungen der klassischen Differentialgeometrie auf allgemeine metrische Räume. Beispielsweise hat das geometrische Verständnis Riemann'scher Mannigfaltigkeiten nicht positiver Schnittkrümmung zur Theorie der sogenannten $CAT(0)$-Räume geführt (hierbei steht ‚CAT' für die Namen Cartan, Alexandrov und Toponogov). In diesen geodätischen metrischen Räumen sind geodätische Dreiecke dünner als ihre Vergleichsdreiecke in der Euklid'schen Ebene.

Während sich diverse Lehrbücher mit metrischen Räumen einer solchen nicht positiven Krümmung detailliert befassen, konzentriert sich Athanase Papadopoulos in seinem Buch in erster Linie auf die etwas allgemeineren geodätischen metrischen Räume nicht positiver Krümmung im Sinne von Busemann. Solche Räume sind dadurch ausgezeichnet, dass Abstandsfunktionen entlang zweier geodätischer Segmente konvex sind.

Nach einer kurzen Einleitung, die die historischen Zusammenhänge der Arbeiten von Hadamard, Menger, Busemann und Alexandrov in Bezug auf den Begriff der nicht positiven Krümmung geodätischer metrischer Räume erläutert, beginnt der Autor in den ersten beiden Kapiteln systematisch damit, die Theorie der Längenräume und der geodätischen metrischen Räume zu entwickeln. Hierbei legt er einerseits großen Wert auf Präzision, veranschaulicht andererseits neue Begriffe stets mit zahlreichen Beispielen. Für ein eingehenderes Studium vieler dieser Beispiele sind die gegebenen Referenzen ebenso interessant wie dafür, einen historischen Überblick zu bekommen. Die Beweise sämtlicher Aussagen werden vollständig ausgeführt, ohne dass Beweislücken durch das Heranziehen anderer Literatur geschlossen werden müssten. Ein jedes Kapitel schließt mit weiteren historischen Bemerkungen und diesem Stil, der sowohl für das Selbststudium von Studenten, als auch für Wissenschaftler, die das eine oder andere Detail nachschlagen wollen, geeignet ist, bleibt der Autor durchgängig treu.

Im dritten Kapitel widmet er sich den Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Lipschitz Abbildungen, bi-Lipschitz Homöomorphismen, nicht kontrahierende und nicht expandierende Abbildungen, Isometrien und lokale Isometrien werden nicht nur eingeführt und veranschaulicht. Vielmehr wird sofort damit begonnen, mit ihnen zu arbeiten. Neben vielen anderen interessanten klassischen Resultaten werden u. a. auch der Banach'sche Fixpunktsatz und der Satz von Freudenthal-Hurewicz bewiesen. Schließlich folgt eine Einführung in die Theorie der Überlagerungen.

Im vierten Kapitel werden zunächst der hinlänglich bekannte Hausdorff Abstand und der etwas weniger geläufige Busemann-Hausdorff Abstand zwischen Teilmengen metrischer Räume diskutiert. Im Anschluss daran führt der Autor verwandte Konstruktionen von Metriken auf Isometriegruppen metrischer Räume ein.

Die folgenden drei Kapitel widmen sich diversen Aspekten der Konvexität. Das fünfte Kapitel beinhaltet affin konvexe Mengen in Vektorräumen, die konvexe Kern- und die konvexe Hüllen-Konstruktion, normierte Vektorräume, Grenzwerte konvexer Mengen und Hilbert Geometrien. Konvexe Funktionen werden im sechsten Kapitel diskutiert. Hier sind die zentralen Aussagen, die bewiesen werden, die, dass die Menge der Punkte, an der eine konvexe Funktion nicht differenzierbar ist, abzählbar ist, und dass die lokale Konvexität einer Funktion schon ihre Konvexität impliziert. Das siebte Kapitel behandelt normierte Vektorräume mit strikt konvexem Einheitsball; die Standardbeispiele metrischer Räume also, die (mit Ausnahme des Euklid'schen Raumes) nicht positiv gekrümmt im Sinne von Busemann, nicht aber im Sinne von Alexandrov sind.

Im achten Kapitel werden Busemann Räume explizit definiert, viele äquivalente Charakterisierungen solcher Räume vorgestellt und konvexe Funktionen auf diesen Räumen betrachtet.

Das neunte Kapitel befasst sich dann mit lokal konvexen Räumen und sogenannten ‚local to global' Argumenten. Die zentralen Aussagen, die hier bewiesen werden, sind einerseits der Überlagerungssatz von Alexander und Bishop und andererseits ein Satz von Gromov, der besagt, dass ein einfach zusammenhängender Längenraum, der vollständig, lokal kompakt und lokal konvex ist, ein Busemann Raum ist.

Im zehnten Kapitel wird der visuelle Rand eines punktierten metrischen Raumes eingeführt. Für eigentliche Busemann Räume ist dieser Rand schließlich von der Punktierung selber unabhängig. Auf der Vereinigung eines solchen eigentlichen Busemann Raumes und seinem Rand wird eine Topologie definiert.

Das elfte Kapitel behandelt Isometrien metrischer Räume. Parabolische, elliptische, hyperbolische und axiale Isometrien werden eingeführt und diskutiert; zunächst ganz allgemein und dann im Speziellen für Busemann Räume. Für diese wird z. B. gezeigt, dass eine Isometrie genau dann hyperbolisch ist, wenn sie axial ist.

Im zwölften und letzten Kapitel werden Busemann Funktionen, Ko-Strahlen und Horosphären eingeführt. All diese wichtigen Begriffe gehen auf Busemann selber zurück, und das Kapitel schließt mit noch offenen Fragestellungen, die Ko-Strahlen und Horosphären im Teichmüller Raum betreffen.

Mit diesem Buch ist es Athanase Papadopoulos sicherlich gelungen, eine für Studenten sehr gut nachvollziehbare Darstellung der nicht positiven Krümmung metrischer Räume im Sinne von Busemann zu geben. Auf dem Weg dorthin lernt der Leser all das über Längenräume, geodätische Räume, konvexe Mengen und konvexe Funktionen, was er zum Verständnis der letzten Kapitel wissen muss, was aber auch ganz unabhängig von dem in den letzten Kapiteln behandelten Stoff von Interesse ist. Insbesondere die vielen Beispiele, die mit vollständigen Referenzen zum eingehenderen Studium angegeben sind, werden nicht nur für Studenten interessant sein. Dabei ist es dem Autor besonders wichtig, immer wieder auf Sachverhalte in der Theorie der Teichmüller Räume hinzuweisen, aber auch Hilbert Geometrien, Kobayashis Pseudoabstand, Carathéodorys Pseudoabstand und Floyds Rand einer endlich erzeugten Gruppe gehören neben vielen anderen zu den nicht trivialen Beispielen, die sich durch den gesamten Text ziehen. Das Buch ist sehr sorgfältig geschrieben und der Aufbau keinesfalls zufällig, sondern sehr gut durchdacht. Alles in allem hat es sehr großen Spaß gemacht, darin zu lesen.

Bonn T. Foertsch